Pagina bianca

TRATTATO
ELEMENTARE
DI MECCANICA

Pagina bianca

TRATTATO
ELEMENTARE
DI MECCANICA
DEL SIG.
ABATE BOSSUT

TRADOTTO DALLA TERZA EDIZIONE FRANCESE

CON NOTE; ED UN' APPENDICE

Contenente due Memorie dello STESSO AUTORE *sull' Equilibrio delle Volte.*

E due Memorie inedite sulle Forze centrali del P. Gregorio Fontana *Pub. Prof. di Matematica Sublime nella R. I. Università di Pavia.*

VOLUME PRIMO

Che contiene la STATICA.

IN PAVIA MDCCLXXXVIII.

Nella Stamperia del R. I. Monastero di S. Salvatore.
Con permissione.

lievo di quest' illustre Università di Pavia, versato in siffatte materie, il quale sebbene da principio ripugnasse ad assumersi un tal impegno, attesa la noja grande che si soffre a tradurre un libro di matematica; trattandosi nondimeno di dare al Pubblico un' Opera utilissima, si è di buon grado prestato alle mie brame; ed approfittando de' ritagli di tempo che gli lasciano i suoi studj e le sue incombenze di *Pubblico Ripetitore di Matematica*, non solo si è accontentato di fare la traduzione richiesta, ma ha voluto altresì corredarla d' una gran quantità di Note ed Aggiunte interessanti, onde illustrare ed arricchire l'opera medesima.

La traduzione è fatta sopra la terza edizione Francese corretta ed accresciuta dall' Autore. Le note aggiunte all'opera sono contrassegnate dalla voce *Editore*; ed altre sono alla fine di alcuni Capi, altre poche in piè di pagina.

Le note poste alla fine di alcuni capi sono destinate in parte a maggiormente approfondire qualche teoria importante, ed in parte a supplire a qualche altra che non trovasi nell' Autore. La prima contiene i principali risultati della nuova eccellente Memoria del Sig. Coulomb sopra gli attriti, coronata dalla R. Acc. delle Scienze di Parigi; con in fine alcune belle proprietà riguardanti l'azione più vantaggiosa della potenza ne' piani inclinati in ordine allo sfregamento. La seconda è una nuova soluzione del Problema inverso delle forze centrali, applicata a tutte le circostanze delle Trajettorie Coniche, e delle Orbite Planetarie: lavoro elegantissimo del P. Gregorio Fontana Professore di Matematica sublime in questa Università. La terza è tutta sopra un argomento interessante per l'Artiglieria, e comprende il saggio eccellente di Maupertuis intitolato *Balistica Aritmetica*, con un Problema rimarchevole sopra lo stesso soggetto del Professore suddetto. Del medesimo è pure l'ultima nota che ci offre alcune cose interessanti sopra la percossa de' corpi.

Le note a piè di pagina, per lo più brevissime, e talvolta di una sola linea, e fino di una sola parola, servono, la maggior parte, a rischiarare alcuni passi dell'A. che difficilmente s'intenderebbero senza maestro, le altre a generalizzare ed a maggiormente estendere qualche articolo d'importanza.

Queste note non sono già il frutto d'una lettura rapida e leggiera dell'Opera, ma bensì il risultato dello studio di quattro anni sopra la stessa, in occasione di due corsi di Meccanica fatti dal Traduttore nella scuola del sullodato Professore di Matematica Sublime. Chi fa due volte il corso d'una scienza sotto allo stesso maestro, e sopra lo stesso Autore, vede più cose la seconda volta che non ha vedute la prima, ed entra finalmente nello spirito della scienza medesima. Considerando quindi tutto ciò ch' egli ed i suoi condiscepoli, dotati altronde d' ingegno, hanno trovato o difficile o troppo compendioso, può allora essere in istato di determinare con qualche precisione quali sono i passi che meritano ulteriore dilucidamento, e quali una maggior estensione.

Le Aggiunte alla fine di tutta l'Opera consistono in un' Appendice che abbraccia quattro Memorie. Le prime due sono del Sig. Abate Bossut, ed hanno per argomento *l' equilibrio delle volte*: argomento da esso maneggiato con nuovo metodo, e coll' uso dell' analisi più fina ma nel tempo stesso la più elegante, e che a giusta ragione gli ha procacciati gli elogi di tutti i Geometri d' Europa. Le altre due sono del sunnominato Professore P. Gregorio Fontana: la prima tratta di alcune particolarità delle Trajettorie quando la legge della forza centrale è quella del cubo inverso della distanza dal centro attraente; la seconda, di alcuni paradossi d' una nuova specie nella teoria delle forze medesime.

Da quanto ho esposto finora, ardisco di lusingarmi che l' edizione Italiana della Meccanica dell' Ab. Bossut, debba avere una superiorità decisa sopra l'edizione Francese; e che conseguentemente ella possa interessare non solo tutti quelli che o per diletto, o per professione saranno per darsi allo studio della Meccanica, ma coloro eziandio che l' hanno già studiata sull' Autore medesimo.

Mi rimane d'avvertire il lettore che nella traduzione dell' Opera si sono omessi due pezzi che non appartengono all' Autore. Il primo è un calcolo numerico del ponte levatojo del Sig. de Filley, calcolo unicamente destinato a servire di norma agli Artefici o Costruttori di questa macchina: il secondo è la Tavola delle gravità specifiche delle differenti materie, che trovasi in quasi tutti i libri di Fisica.

DISCORSO

SOPRA

LA MECCANICA.

L'opera presente contiene i principj generali dell' equilibrio e del moto de' corpi solidi, coll' applicazione di questi principj ad alcuni Problemi interessanti di Meccanica speculativa o pratica. Il mio oggetto principale è d' istruire i Principianti; ma nello spiegare gli *elementi* della Meccanica, offro ai Geometri i dati necessarj per risolvere le diverse questioni che appartengono a questa Scienza.

Si sa che la Meccanica dividesi generalmente in due rami; uno, chiamato *Statica*, che tratta dell' equilibrio, principalmente nelle macchine; l' altro, che ritiene il nome di Meccanica propriamente detta, o che dalla maggior parte de' Moderni viene contrassegnato col nome di *Dinamica*, e che considera le proprietà del movimento.

Se l' antichità della Meccanica cominciasse la sua data dall' uso che necessariamente si è fatto della leva, o di alcune altre macchine semplici, allorchè si vollero costruire delle capanne, degli stromenti atti all' agricoltura &c, ella risalirebbe niente meno che all' origine delle società. Ma queste pratiche informi e grossolane, non erano fondate sopra principj scientifici. Si rileva da alcuni scritti d' Aristotele, che nel tempo in cui egli visse, i Filosofi non avevano fin' allora se non che delle nozioni confuse o anche false sopra la natura dell' equilibrio. Archimede dee riguardarsi come il primo inventore della Statica. Egli trovò la proprietà generale del centro di gravità, e determinò questo punto in molte figure, quali sono il parallelogrammo, il triangolo, la parabola, &c. Egli fece vedere che due pesi sospesi alle due estremità d' una bilancia, ed in equilibrio, sono reciprocamente proporzionali alle loro distanze dal punto d' appoggio; dal che ne risultava tutta la teoria della leva. Egli estese questa teoria a molte altre macchine da esso immaginate. Siamo a lui debitori, per esempio, del piano inclinato, della vite ordinaria, d' una specie di vite che porta il suo nome, e che serve ad innalzare dell' acqua per mezzo d' un moto continuo. Tutti gli Storici parlano della sorpresa che eccitò ne' suoi Compatriotti, e del terrore che sparse nell' Armata Romana, cogli effetti inauditi delle sue macchine all' assedio di Siracusa. Un Ingegnere Romano, per nome Appio, faceva giuocare molte grosse macchine per rompere la muraglia che circondava la città: *Ma* *queste cose* (*) *non contavan punto rispetto ad Archimede ed alle di lui macchinazioni; alcuna delle quali già non proponevasi egli come fattura che meritasse studio ed applicazione, ma erano per la maggior parte scherzi ed accessorj della geometria ch' ei professava, essendosi da prima Archimede lasciato persuadere dalle istanze del Re Gierone, a rivolgere alcun poco quell' arte sua dalle contemplazioni della mente alle cose corporee, e far in qualche modo più evidentemente apparire anche alle persone volgari i suoi pensamenti per la via del senso, mescendoli a cose che fossero di loro qualche uso*. Si veda in Plutarco medesimo la storia della resistenza che le macchine d' Archimede opposero alla presa di Siracusa.

Riconoscendo che i Moderni hanno ricevuto da Archimede i principj della Statica, noi dobbiamo aggiungere, colla medesima equità, ch' essi gli hanno generalizzati e perfezionati. In quanto alla teoria del moto, sembra che ella non sia stata conosciuta dagli Antichi. Parlo dei moti variati; poichè il moto uniforme non ha difficoltà alcuna, e tosto che vi si fece qualche attenzione, le sue proprietà si sono presentate quasi da se stesse. Galileo trovò, nel principio del passato secolo, la legge dell' accelerazione de' gravi. Si vedeva bensì che una pietra che cade, acquista tanto più di velocità quanto più cade dall' alto; ma s' ignorava e Ga-

(*) Plutarco, Vita di Marcello. Mi servo della traduzione di Girolamo Pompei.

lileo determinò l'esatta proporzione secondo la quale cresce la velocità. Questa scoperta lo condusse ad una teoria completa del moto uniformemente accelerato. Cartesio s'ingannò, almeno in parte, nelle regole che volle stabilire per determinare i moti che risultano dalla percossa vicendevole de' corpi. Huyghens e Wallis diedero le vere leggi di questi movimenti. In appresso fu inventata l'analisi infinitesimale e divenne nelle mani de' Moderni un istromento, che applicarono a tutte le parti della Matematica. Non finirei mai, se volessi riferire minutamente le scoperte che hanno fatte, con questo mezzo, nella Meccanica, e principalmente nella teoria de' movimenti prodotti dall' azione e reazione che i corpi d'un medesimo sistema esercitano gli uni su gli altri. Si possono consultare i Trattati particolari di Meccanica che essi hanno scritto, e le Memorie delle più celebri Accademie d'Europa. Ritorno all' Opera proposta.

I. STATICA

Riducesi ordinariamente l'oggetto della Statica alla considerazione dell' equilibrio delle macchine. Io riguardo quì questa scienza sotto un punto di vista meno ristretto. Comincio a stabilire la teoria generale dell' equilibrio; indi ne fo l'applicazione al caso particolare delle macchine.

Tutto, nella Natura, ci presenta l'immagine della forza. L'idea che si unisce a questo vocabolo, sembra egualmente chiara, e nel senso proprio, e nel senso figurato. Quando si descrive la forza d'una palla da cannone che colpisce e rovescia una muraglia; quando si parla della forza d'un ragionamento: non vi è alcuno che non concepisca sul momento, la cosa che cercasi di esprimere. Dopo tutto questo si crederà egli che i Matematici, cotanto gelosi d'adoprar sempre il termine proprio nel loro linguaggio, abbiano potuto essere divisi sopra la nozione della forza? Eppure lo sono stati; e Leibnitz è quegli che ha fatto nascere, per un tempo, questa specie di scisma filosofico. Prima di quest'uomo illustre, si valutava di comune consenso, la forza de' corpi in moto, dal prodotto della loro massa e della loro velocità: egli pretese che in questa misura bisognava sostituire il quadrato della velocità, invece della velocità semplice. Egli trasse molti Dotti nella sua opinione; e gli altri la rigettarono. Si scrisse da ambe le parti. La disputa divenne tanto più viva, quanto che aveva la sua origine nella Metafisica, solita troppo spesso a confondere l'ingegno umano. Fortunatamente la face del calcolo dissipò la nube che si formava all'ingresso della Meccanica. Siccome i due partiti, nel definire differentemente la forza, altronde si accordavano tra loro sopra tutti gli altri punti, ed erano conseguenti nella loro maniera di ragionare; così giugnevano ai medesimi risultati nella soluzione de' Problemi medesimi. Egli è agevole di comprendere che la cosa doveva essere così; giacchè ogni calcolo è fondato sopra alcune ipotesi; e purchè nel seguito delle operazioni ch'esso richiede, il medesimo elemento si combini sempre allo stesso modo cogli altri, la conclusione ci porterà sempre al medesimo risultato. Se vi corre qualche divario, esso non potrà essere che apparente, e semplicemente nell' enunziazione. Quindi la disputa di cui parliamo ha avuto quella sorte che doveva avere, vale a dire ch' ella è cessata intieramente. Si è finalmente convenuto d' intendersi. La misura delle forze, che Leibnitz voleva sbandire, ha trionfato, come la più naturale e la più semplice. Io pertanto ho creduto di doverla adottare, e presentare a miei Lettori.

Nello stato d' equilibrio di cui si fa quì quistione, la forza non ha alcun esercizio attuale, ed ella non produce che una semplice tendenza al moto. L' equilibrio risulta dalla distruzione di più forze che si contrastano, e che annichilano reciprocamente l' azione che esercitano le une contro le altre. Adunque si tratta unicamente di sapere come si operi questa distruzione; ed in ciò consiste precisamente l' oggetto della Statica.

Ogni scienza è fondata sopra alcuni assiomi o proposizioni la cui verità è per se stessa evidente. Così, nella Statica, si riguardano come assiomi, che un punto, sollecitato al moto da più forze, non può prendere che una sola strada; che due forze eguali e direttamente opposte si distruggono; che una forza applicata ad un corpo, perpendicolarmente ad una linea o ad un piano, non avendo maggior tendenza a muovere un corpo per un verso che per un altro parallelamente a questa linea o a questo

piano,

piano, non deve generare alcun movimento di questa specie. Tali sono i caratteri che mi servono a riconoscere ed a stabilire l'equilibrio nelle differenti combinazioni di forze, che possono aver luogo. Scorriamo rapidamente queste combinazioni.

La prima e la più semplice di tutte è quella delle forze che agiscono nella direzione d'una stessa linea retta, le une da una parte, le altre dalla parte opposta. Si prova facilmente che tutte le forze dirette dalla medesima parte producono una risultante uguale alla loro somma. Quindi, affinchè nel caso presente vi sia equilibrio, fa d'uopo che la somma di tutte le forze che tirano, per esempio, da sinistra a destra, sia uguale alla somma di tutte le forze che tirano da destra a sinistra.

Le forze che hanno le direzioni concorrenti nel medesimo punto, formano una seconda classe molto estesa. Primieramente prendendo due di queste forze, esse hanno una risultante espressa dalla diagonale d'un parallelogrammo costruito sopra le loro direzioni. Questa risultante, combinata con una terza forza, produce una risultante espressa dalla diagonale d'un secondo parallelogrammo analogo al primo. Così di seguito. Con questo mezzo, tutte le forze proposte si ridurranno solamente a due, le quali, in virtù dell'equilibrio, saranno eguali e direttamente opposte.

Alla medesima classe si possono riferire le forze che hanno le direzioni parallele; poichè le linee parallele possono riguardarsi come concorrenti al medesimo punto infinitamente lontano. Considerando due di queste forze, che agiscono dalla stessa parte, si trova che producono una risultante che è ad esse parallela, e che è uguale alla loro somma, nella stessa maniera che se agissero in linea retta. Inoltre, la direzione di questa risultante divide la distanza delle direzioni delle forze componenti, in parti reciprocamente proporzionali alle quantità delle forze medesime. Si formerà parimenti una seconda risultante, combinando quella di cui abbiamo parlato, con una terza forza. In tal modo si giugnerà, come prima, a due forze finali che saranno eguali e direttamente opposte, per soddisfare al principio fondamentale dell' equilibrio. Non ho bisogno di far osservare che potrebbe riguardarsi come un caso particolare delle forze parallele, quello delle forze che agiscono secondo la medesima linea retta.

Le forze parallele hanno un gran numero di proprietà che dimostro partitamente, ed in una maniera nuova secondo alcuni rispetti. Queste proprietà sono per se stesse interessanti, e servono ad estremamente abbreviare molte ricerche di Meccanica.

A misura che ci avanziamo, i Problemi si complicano, e si generalizzano. Dopo aver determinato l' equilibrio delle forze concorrenti ad un medesimo punto, o parallele tra loro; eccoci giunti alla considerazione delle forze che hanno delle direzioni qualunque. Figuriamoci adunque che a differenti punti d' un corpo solido, di grandezza sensibile, ed altronde perfettamente libero, sieno applicate delle forze che lo tirino e lo spingano, secondo quelle direzioni che si vorranno immaginare. Sarebbe cosa malagevole di ridurre immediatamente lo stato di queste forze alle leggi primitive dell' equilibrio. Ma si può conseguire questo fine, coll' aiuto delle proposizioni già dimostrate, e coll' osservare che ciascuna forza in particolare può decomporsi in tre altre, parallele a tre linee date di posizione. Per la qual cosa, descriviamo nello spazio tre linee fisse, le quali si incrocicchino perpendicolarmente tra loro nel medesimo punto. Ciascuna potenza applicata al corpo essendo stata decomposta in tre altre, parallele a queste tre linee; e considerando che tutte le forze parallele che agiscono nella stessa direzione, sono riducibili ad una sola forza eguale alla loro somma: egli è facile di vedere che tutte le potenze proposte, d'un numero qualunque, e dirette in un modo qualunque, potranno esser ridotte a sei forze parallele alle nostre tre linee. Delle due forze parallele alla medesima linea, una tira da sinistra a destra, l'altra da destra a sinistra. Ciò posto, io trovo le condizioni dell' equilibrio in una maniera nuova, e che sembrami non lasciar nulla da desiderare dal canto della semplicità. Esprimo queste condizioni con sei equazioni generali che fanno vedere, 1.° che per ciascuna coppia di forze che agiscono parallelamente alla stessa linea, la forza che tira da destra a sinistra deve esser uguale alla forza che tira da sinistra a destra. 2.° Che la somma delle energie o momenti delle forze che tendono a far girare il corpo, per un verso, intorno a ciascuna delle nostre tre linee, deve esser uguale alla somma de' momenti delle forze che tendono a farlo girare pel verso contrario. Questo Problema è il più composto di tutta la Statica; ed è suscettibile d'un' infinità d'applicazioni particolari per mezzo del calcolo e della Geometria. Allorchè il corpo, al quale sono applicate le forze, è ritenuto da un punto fisso intorno al quale ha altronde tutta la libertà di poter girare per ogni verso, sono necessarie per l'equilibrio soltanto le tre ultime equazioni; ed esse comprendono tutta la teoria dell' equilibrio della leva ordinaria, considerata sotto il punto di vista più generale.

Vi è, ne' corpi sottoposti all' azione della gravità, un punto insigne che chiamasi *centro di gravità*. La determinazione di questo punto, e delle proprietà che gli appartengono è un ramo della composizione e decomposizione delle forze parallele. Trovasi, nella maggior parte de' Libri di Meccanica, che il centro di gravità è un punto dal quale essendo sospeso un corpo in diverse direzioni, rimane immobile in tutte le situazioni possibili. Ciò suppone, come rilevasi, che attaccando il corpo in diversi punti ad un cordone, tutti i prolungamenti di questo cordone s'intersecheranno nel centro di gravità. Ora, quest' asserzione è ella evidente per se stessa, e non aveva forse bisogno d'essere dimostrata? Io fo vedere, molto semplicemente, ch'essa è realmente esatta, e con ciò tolgo il dubbio legittimo che si potrebbe avere su questo proposito.

L'equilibrio delle macchine è la parte, se non la più difficile, almeno la più utile della Statica, attesi i continui servigi ch'ella rende alla Società. Era pertanto essenziale di trattarla con chiarezza e precisione, ed io non ho nulla trascurato per adempire questo oggetto.

La maggior parte degli uomini che non hanno fatto uno studio profondo delle leggi generali dell'equilibrio, hanno delle idee ben poco giuste su l'effetto delle macchine. Sonovi alcuni che nati con dell'agilità nelle mani, ed anche con dell'immaginazione, non veggono che confusamente il prodotto della combinazione dei diversi pezzi che compongono una macchina, perchè sono privi di principj ricavati dalla sana teoria. Eglino però hanno, d'ordinario, molta franchezza; annunziano con enfasi le pretese maraviglie delle loro invenzioni in questo genere. Se incontrano degl'increduli, citeranno loro, in esempio, la proposizione che faceva Archimede, (degna in vero d'ispirare la fiducia), di sollevare il globo della Terra, purchè gli si desse un punto fisso per appoggiare la sua leva. Vediamo se quest'esempio conclude in loro favore; ed apprezziamo la speranza che si può giustamente concepire d'una macchina.

Il moto non può nascere da se stesso. Esso è essenzialmente prodotto da qualche agente esterno che toglie la materia dallo stato di quiete, o accelera l'impulsione ch' essa può aver già ricevuta. Ora, la forza che a tal effetto viene spesa dall' agente, è necessariamente limitata. Un uomo, per esempio, si tragga dietro una pietra sul terreno: egli perderà contro questa massa una certa parte della sua forza; e se, in ragione del suo peso e dell' attrito, la pietra oppone una resistenza che l'agente non possa superare, non vi sarà alcun movimento. Supponiamo che la pietra cammini: noi possiamo concepire che la forza intera ed assoluta dell'uomo sia divisa in tre altre: la prima, che gli rimane ed in virtù della quale cammina egli stesso; la seconda, che è assorbita dalla resistenza degli attriti; la terza, che è impiegata a far camminare la pietra. Quest' ultima è propriamente ciò che chiamasi la *forza motrice*; ed è misurata dal prodotto della massa ch' ella muove e della velocità che le imprime. Data la proporzione, dicasi lo stesso riguardo a tutte le altre specie di agenti: in generale si può considerare ogni forza motrice, come avente per elementi o fattori, un peso ed una velocità. Io non esamino se, nell' ipotesi proposta, vi sia, relativamente al modo onde un animale cava la sua forza dal giuoco de' suoi muscoli, una velocità capace di rendere il dispendio dell' azione esterna che può fare, il massimo possibile. Per toglier di mezzo questa quistione, che appartiene all' economia delle forze animali, se pur mi è lecito il così esprimermi; e per ridurre il Problema a' suoi minimi termini, suppongo che ciascun agente sia impiegato nel modo più vantaggioso, e che dia conseguentemente alla macchina tutta la forza che realmente le può dare. Abbiamo dunque una forza motrice, fissa e determinata, che servirà a vincere una data resistenza, o, ciò che torna allo stesso, ad elevare un dato peso. Ella rimarrà sempre la stessa, qualunque sieno i mezzi che s'impiegano per trasmetterla al peso di cui trattasi. Indarno, colla mira di accrescerla, si moltiplicheranno le leve e le ruote: tutti questi stromenti non hanno per se stessi alcuna virtù attiva; essi non hanno maggior forza di quella che ricevono; sovente ancora assorbiscono in pura perdita una parte della forza motrice, sia per mezzo de' punti fissi e distruttori ch' essi le presentano, sia per mezzo dell' attrito e delle altre resistenze che cagionano. Dunque il loro vero destino non può esser altro che di modificare differentemente la forza motrice, trasportandola al peso da elevarsi. Se essi fanno crescere questo peso, fanno diminuire la velocità nel medesimo rapporto; e se al contrario accrescono la velocità, lo fanno col dispendio della massa. Archimede aveva ragione di dire che con una leva ed un punto fisso, egli solleverebbe il globo della Terra. Basta, per convincersene, di gettar uno sguardo sopra una bilancia che ha le braccia disuguali. Quanto più uno de' bracci è lungo per rapporto all' altro, tanto più seconda il peso attaccato alla sua estremità; di modo che aumentando sempre più questa lunghezza, non vi sarà alcun limite alla diminuzione del peso che vi è applicato. Nelle macchine ove trattasi in tal guisa di stabilire unicamente l' equilibrio, le forze, atteso il modo onde sono situate, possono estremamente differire in quantità. Ma la maggior parte delle macchine hanno per oggetto di produrre del movimento; ed allora la forza motrice essendo sempre la stessa, il peso elevato sarà più o meno grande, secondo che prenderà meno o più velocità. Dunque voi potete, per esempio, con un peso d' una libbra, applicato all' estremità d' un braccio di leva di dieci piedi, far equilibrio con un peso di dieci libbre, applicato all' estremità dell' altro braccio che è d' un piede: ma se volete produrre del movimento, e se supponete che la forza motrice sia il peso d' una libbra, animato da una velocità capace di fargli percorrere un piede in un secondo; il peso elevato, cioè a dire, il peso di dieci libbre, non trascorrerà durante il medesimo tempo, che la decima parte d' un piede: perciocchè le velocità dei due pesi posson esser rappresentate dagli archi simili che descrivono nel medesimo tempo, e questi due archi stanno tra loro come i loro raggi o come le braccia della leva. Laonde si fa manifesto che se Archimede avesse realmente avuto le cose che chiedeva per far salire il globo della Terra, sarebbe passato un tempo molto considerevole, avanti che questa massa enorme avesse preso un movimento sensibile.

Qual' è adunque precisamente lo scopo delle macchine? La risposta è facile, e discende dalle cose predette. Le macchine servono a trasmettere, secondo una certa legge, la forza motrice, al peso che vuolsi elevare. Esse ci offrono la facilità di accrescere questo peso o la sua velocità; e questa prerogativa è infinitamente preziosa. Imperciocchè avviene spessissimo che si ha bisogno d' elevare un peso considerevole, senza essere angustiati dal tempo; altre volte vogliamo procurarci una velocità grande, e non innalzare un gran peso. Abbiamo il mezzo di adempire l'una o l'altra condizione. Ma una macchina, qualunque siasi, non ci farà mai guadagnare nulla da una parte, che non si perda dall' altra. Ecco il circolo necessario da cui non è possibile d' uscire.

Ma dirà taluno, se in tutte le macchine, il peso elevato e la sua velocità sono reciprocamente proporzionali, esse sono dunque tutte ugualmente vantaggiose, ed è inutile l' affaticarsi ad immaginarne delle nuove. Ciò ha bisogno di spiegazione.

Si annoverano sette macchine semplici e primitive: la Macchina Funicolaria, la Leva, la Carrucola, il Torno, il Piano inclinato, la Vite ed il Cuneo. Tutte le altre macchine fatte o da farsi, non posson essere se non delle combinazioni di quelle sette, o della medesima, ripetuta un certo numero di volte. Le macchine semplici hanno ciacuna le loro proprietà, il loro oggetto particolare, e tutta la perfezione di cui sono capaci. Esse non si possono paragonar insieme che in un senso assai improprio, poichè hanno differenti destinazioni. Perlocchè la quistione, se sianvi delle macchine più perfette le une delle altre, non ha luogo relativamente alle macchine semplici; ma ella può essere proposta in ordine alle macchine composte. Ora, l'uso di quest' ultime è frequente ed indispensabile; perciocchè accade rare volte di poter produrre l'effetto di cui si ha bisogno, col mezzo d'una macchina semplice. Allorchè pertanto siete obbligato ad impiegare una macchina composta, non la complicate almeno se non quanto è assolutamente necessario; evitate, quanto più potrete, gli attriti e le altre resistenze estranee al prodotto effettivo che volete ottenere. La macchina più perfetta in questo genere, è quella in cui la forza motrice si trasmette, col minor discapito possibile, al peso da elevarsi. Studiatevi di diminuire questo discapito, chè allora le vostre ricerche avranno un fine molto reale e molto utile; ma attenetevi a ciò solo, e non promettete nulla di più. Ogni altro vantaggio, che vorreste attribuire alle vostre macchine, è una chimera.

Queste riflessioni generali si rendono più evidenti per mezzo de' dettaglj in cui entro a proposito delle sette macchine semplici. Ben si scorge che non è possibile di dir cose nuove sopra una materia cotanto ribattuta. Nondimeno si troveranno quì delle dimostrazioni che non vi sono altrove, e che hanno il vantaggio d'essere molto semplici. Trattando della Leva, do la teoria dell' equilibrio de' Ponti Levatoj, teoria non per anche spiegata, almeno ch' io sappia, in alcun Libro di Meccanica.

Non mi sono poi limitato a considerare l'equilibrio matematico delle macchine. Esamino le resistenze ch' esse provano nel loro stato fisico e naturale, allorchè sono in procinto di muoversi. L'attrito e la difficoltà che hanno le corde a piegarsi intorno a' cilindri che abbracciano, oppongono degli ostacoli più o meno sensibili alla generazione del movimento. Basta di riflettere un poco sopra la natura di queste resistenze, e sull' impossibilità assoluta di totalmente annichilarle, per riconoscere la chimera del moto perpetuo. Siamo molto lontani dal poter valutare l'attrito e la rigidità delle corde, con una precisione geometrica. Ciò non ostante questa teoria ha fatto de' progressi dacchè si è cominciato ad occuparsi di essa; ella ne può fare ancora de' maggiori, col soccorso dell' esperienza. Io la svolgo minutamente, e ne fo l' applicazione ad alcuni esempj da cui la pratica ricaverà qualche frutto. Egli era in tal guisa necessario per compire la Statica elementare, che accoppiando la teoria fisica dell' equilibrio delle macchine, con quella del loro equilibrio matematico, io determinassi, almeno quanto è possibile, il punto ove l'equilibrio è in procinto a rompersi per dar luogo al movimento.

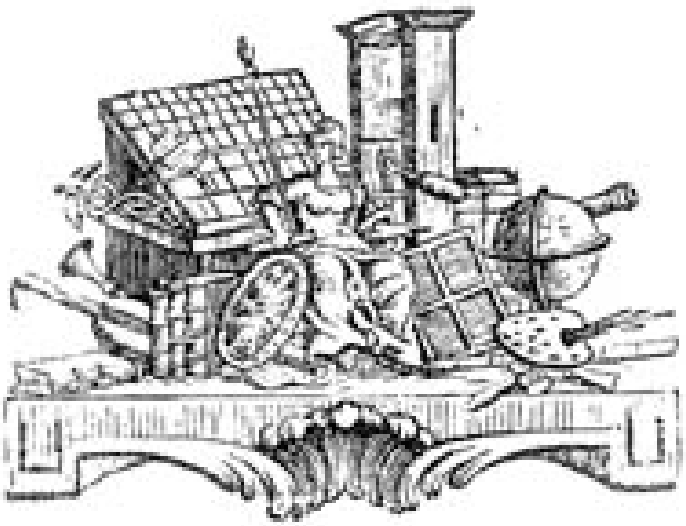
II.
DINAMICA

La Dinamica, che considera il moto, offre un campo inesausto di ricerche: perciocchè gli elementi del moto sono suscettibili d'un numero infinito di varietà e di combinazioni, che producono altrettante proprietà particolari. Ma si può sempre riferire queste proprietà a differenti classi generali. Qualunque sia la natura del moto; o esso sia uniforme o variabile, secondo una legge qualunque; o un corpo si muova in linea retta; o descriva una curva data o determinabile da quali si vogliano condizioni: si esprimono per mezzo d'equazioni generali tutte le relazioni possibili fra gli spazj, i tempi, le velocità e le forze. Indi si modificano queste formole e si applicano a ciascuna specie particolare di movimento. Se trattasi di determinare i moti che risultano dall' azione e reazione che molti corpi d'un medesimo sistema esercitano gli uni su gli altri, il Problema è sempre riducibile, per le leggi della Statica, ai principj del moto che ho indicati; perciocchè i corpi, in virtù delle resistenze che reciprocamente si oppongono, perdono o guadagnano del moto, per modo che vi è sempre equilibrio fra i moti perduti ed i moti guadagnati; donde risulta che si avranno i moti ch' essi hanno effettivamente, in ogni istante, cioè a dire, le espressioni degli spazj, de' tempi, &c, coll' esprimere analiticamente le condizioni di quest' equilibrio.

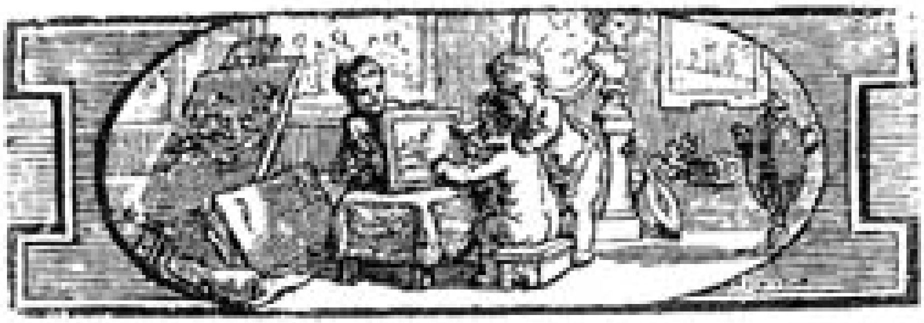
Tale è il punto di vista sotto il quale ho ravvisata e trattata la Dinamica. Dopo aver esposto i principj generali del moto, do le formole del moto uniforme, e ne fo l' applicazione a molti esempi. Quindi passo ai moti variati; spiego nel maggior dettaglio la teoria del moto uniformemente accelerato o ritardato; teoria da cui ne ricavo, come corollario, tutto ciò che è relativo ai moti de' corpi che cadono liberamente per la gravità, o che strisciano sopra de' piani inclinati. Il moto de' centri di gravità ha molte proprietà che esamino a parte; dimostro in una maniera nuova, e con tutta la possibile generalità, la proposizione fondamentale di questo moto; e ne fo veder l' uso per la misura delle estensioni che possono riguardarsi come generate dal movimento.

Le leggi della comunicazione del moto occupano un luogo considerevole in questa seconda parte della Meccanica. Il principio a cui la riduco è l' equilibrio de' moti che si contrastano e si distruggono per le loro vicendevoli opposizioni. Fo primieramente l' applicazione di questo principio all' urto de' corpi, sia che la percossa facciasi direttamente, sia che un corpo ne incontri nel medesimo tempo un numero qualunque d' altri, disposti in qualsivoglia modo per rapporto alla sua direzione. La sola limitazione rapporto alla generalità di questi Problemi, si è che i corpi sono supposti sferici, o sia che le forze perpendicolari alle loro superficie, ne' luoghi de' contatti, passano pei loro centri di gravità particolari. Ma per risolvere il caso in cui la percossa fosse eccentrica, ed in generale tutte le questioni dello stesso genere, esamino i moti d' un corpo libero di qualunque figura, che è percosso o spinto secondo una direzione che non passa pel suo centro di gravità. Dimostro molto semplicemente che il centro di gravità del corpo si muove nella stessa maniera che se si trovasse sopra la direzione della forza motrice, e che nel medesimo tempo il corpo gira, almeno nel primo istante, intorno al centro di gravità, allo stesso modo, come se questo punto fosse fisso. Questo Teorema generale è rischiarato da alcune applicazioni che ne mostrano lo spirito e l' uso. Do in seguito molti Problemi concernenti il moto de' corpi che agiscono gli uni su gli altri per mezzo di leve, di fili, o in ogni altra maniera. I nostri Lettori si potranno proporre essi stessi degli altri Problemi analoghi; s' eglino hanno ben compresi i principj che mi sono studiato di spiegare, non troveranno, in queste ricerche, altre difficoltà, che quelle che dipendono dalla Geometria e dal calcolo. Finisco con delle considerazioni matematiche e fisiche sopra le macchine in movimento.

Ho aggiunte alcune note a questo Trattato; la maggior parte hanno per iscopo di approfondire certe teorie che richieggono la cognizione del calcolo integrale. Do, per esempio, le formole generali per la determinazione di tutte le specie di moti variati, rettilinei o curvilinei; le applico al moto de' corpi che cadono secondo una legge qualunque, alle oscillazioni in archi di cerchio di grandezza arbitraria, al Problema generale delle forze centrali, a quello della più veloce discesa, &c. Le altre questioni relative al moto, si risolvono coi medesimi principj.



Pag.	lin.	ERRORI	CORREZIONI
32	24	$Q : ED$	$Q :: ED$
46	27	centro F	centro F (50)
88	17	*dopo la parola* settore *si aggiunga*. Dunque il centro di gravità di quest' arco sarà lo stesso che quello del settore.	
94	4	$x y d x$	$\int x y d x$
95	6	$y d y \surd$ &c	$\int y d y \surd$ &c.
	ult.	$\int \frac{1}{2} p^2$ &c	$\int \frac{1}{4} p^2$ &c
97	10	*dopo* $max^{m-1} dx(a+bx^n)^{r-1}$ *si aggiunga* $+(m+nr)bx^{m+n-1} dx(a+bx^n)^{r-1}$. Dunque $\int x^{m+n-1} dx(a+bx^n)^{r-1}$	
102	18	*dopo* $-y(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$ si legga $-\int -y \cdot d \cdot (a^2-y^2)^{\frac{3}{2}}$, *poi si aggiunga* $=-y(a^2-y^2)^{\frac{3}{2}} - \int 3y^2 dy (a^2-y^2)^{\frac{1}{2}} = -y(a^2-y^2) -$ &c	
149	19	P	P'
160	20	considerate	considerati
173	28	Em	Fm
195	2	$2R \times \Pi$	$2r \times \Pi$
220	6	con esso	con essa
222	2	(225)	(223)
242	17	*dopo la parola* movimento *si aggiunga*, malgrado la resistenza dell' attrito.	
277	27	*dopo la parola* attrito *si aggiunga* (supposto r il rapporto dell' attrito alla pressione)	



TRATTATO *ELEMENTARE* DI MECCANICA.

NOZIONI GENERALI.

1. La Meccanica, nel significato più esteso del termine, è una scienza che ha per oggetto le leggi dell' equilibrio e del moto de' corpi. Onde si vede ch' ella dividesi in due rami. Quella che tratta dell' equilibrio si chiama *Statica*, e quella che considera il moto dicesi *Meccanica propriamente detta*, o *Dinamica*:

2. Si chiama *corpo*, l' aggregato di molte parti di materia, riguardate come impenetrabili, cioè a dire, come esistenti sempre ciascuna in un luogo particolare, senza poter giammai

essere ridotte a non occupare che un solo e medesimo spazio indivisibile.

Questa vicendevole impenetrabilità delle parti de' corpi è la proprietà caratteristica della materia. La Meccanica non considera i corpi, che sotto questo solo aspetto; ella prescinde da tutte le qualità ch' essi possono altronde avere, come il colore, l' odore, la figura, &c; appartenendo l' esame di queste qualità e de' loro effetti ad altre parti della Matematica, o alla Fisica.

Vi sono de' corpi, che per mezzo della compressione si obbligano ad occupare un minor volume. Ma ciò proviene dall' aver essi de' *pori* o spazj vacui, che permettono alle parti della materia di avvicinarsi le une alle altre, cosicchè quando esse si toccano, non si possono ulteriormente condensare.

3. Allorchè le parti d' un corpo sono aderenti le une alle altre, e non cedono che difficilmente alla loro vicendevole separazione, il corpo si chiama *solido*; ed ha più o meno di solidità, secondo che quest' aderenza è più o meno forte. Ma se le parti sono disgiunte le une dalle altre, ed hanno la libertà di mutar luogo, il corpo dicesi *fluido* o *liquido*. In quest' Opera si tratterà solamente della Meccanica de' corpi solidi, riservando per quella de' fluidi un Trattato a parte.

Qualunque corpo, o solido, o fluido, è pesante; cioè a dire, tende a discendere, o discende effettivamente, se nulla lo impedisce, verso la superficie della terra, seguendo una linea diretta al centro di questo globo. Ma non dee perciò riguardarsi la gravità come essenziale alla materia; ella non le appartiene che accidentalmente, ed ha la sua causa particolare. Perchè, difatti, i corpi tenderebbero eglino per se stessi verso un punto dello spazio piuttosto che verso un altro, e quale virtù fondata sulla loro natura potrebbe dar loro una tale tendenza verso il centro della terra? Dobbiamo pertanto avvezzarci a spogliare, col pensiero, i corpi della gravità, ed a non ravvisare in essi che della materia estesa ed impenetrabile. Quando noi li considereremo unicamente sotto questo punto di veduta, li denoteremo colla semplice voce *corpo*; ma quando li riguarderemo come sottoposti all' azione della gravità, li chiameremo *corpi pesanti* o *pesi*.

4. Siccome un corpo può essere più o meno poroso, ovvero siccome le parti onde è composto possono essere più o meno vicine le une alle altre, così fa d' uopo distinguere la sua *massa* dal suo *volume*.

5. S' intende per la massa d' un corpo la quantità di materia propria onde è composto; il volume è lo spazio apparente ch' esso occupa, o sia l' estensione del corpo secondo le tre dimensioni, lunghezza, larghezza, e profondità. La Geometria misura i volumi, e la Meccanica non considera che le masse. Quindi nel seguito di questo Trattato, per la voce *corpo*, si denoterà sempre la massa.

6. Il rapporto della massa al volume, cioè a dire, la quantità di materia che con-

tiene un corpo sotto un *dato* volume, è ciò, che ne forma la *densità*. Ben si vede che un corpo non dicesi più o meno denso se non che in confronto ad un altro corpo. Ora, per fare un tal confronto, convien dividere le masse pel numero delle misure de' loro volumi; cioè a dire, pel numero delle tese cubiche, de' piedi cubici, &c, ch'esse contengono: i quoti, che sono delle masse comprese sotto *l'unità di volume*, esprimono le densità. Così, se sianvi due corpi *A* e *B*, e chiaminsi G e γ i loro volumi o grandezze, D e δ le loro densità: si avrà la proporzione $D : \delta :: \frac{A}{G} : \frac{B}{\gamma}$; dunque eziandio $A : B :: GD : \gamma\delta$, cioè a dire, *le masse sono in ragion composta de' volumi e delle densità*.

7. I Metafisici hanno esaurite le loro sottigliezze intorno alla natura dello spazio e del vacuo, senza poter giungere a convenire tra loro sopra le nozioni che volevano dare di questi due esseri. Sarei troppo diffuso, e altronde questo dettaglio non sarebbe d'utilità alcuna, se volessi quì riferire tutte le loro dispute su questo proposito. Ci basta di considerare lo spazio o il vacuo (giacchè prendo queste due voci nel medesimo senso) come esteso, penetrabile, capace di ricevere i corpi, e di dar loro un libero passaggio per tutti i versi.

8. Si distinguono due sorti di spazj; lo spazio *assoluto* e lo spazio *relativo*.

Lo spazio assoluto esiste o si può concepare che esista per se stesso, senza relazione alle cose esterne; di modo che se tutti i corpi fossero annichilati, esso sussisterebbe nè più, nè meno. Lo spazio relativo è determinato e cade sotto i nostri sensi per la sua relazione ai corpi: una camera, per esempio, che è terminata dalle quattro muraglie, il pavimento e la soffitta, è uno spazio relativo.

9. Allorchè un corpo rimane costantemente nel medesimo luogo dello spazio, cioè a dire allorchè mantiene la medesima situazione per rapporto a tutte le parti fisse dello spazio, egli è in *quiete*; quando cangia di luogo, o corrisponde successivamente a diversi punti dello spazio, egli è in *moto*. L' uno o l' altro stato è *assoluto* o *relativo*, secondo che è assoluto o relativo lo spazio, nel quale immaginiamo trovarsi il corpo.

10. E' stato scritto molto, e col medesimo successo, tanto sopra il tempo come sopra lo spazio. A noi basterà di riguardare il tempo come prodotto dal flusso successivo ed uniforme dell' istante che ne è l' origine o l' elemento, in quella guisa che in Geometria riguardasi la linea come prodotta dal moto del punto che è una delle sue estremità.

11. Il tempo, considerato in se stesso, ed independentemente da qualunque relazione alle cose esterne, si appella tempo *assoluto*; ma quando si prende per esprimere la durata successiva degli esseri, chiamasi tempo *relativo*. Nella Meccanica non abbiamo bisogno che del tempo relativo, e lo chiameremo semplicemente tempo.

12. Noi misuriamo il tempo, col riferirlo ad un dato moto, preso per unità, che rimane o che immaginiamo rimanere sempre uguale ed uniforme. Questa misura non è la medesima presso tutti i popoli. Alcuni la regolano sopra il corso apparente del Sole, ed altri sopra quello della Luna o delle Stelle. Noi adotteremo il primo uso, che è il più generalmente ricevuto. Così l' intervallo di tempo che noi chiamiamo *anno*, è rappresentato dallo spazio che il Sole descrive nel Cielo dal suo punto di partenza da un dato luogo, sino al suo ritorno al luogo medesimo. Ci possiamo raffigurare questo spazio sotto l' immagine d' una linea retta che fosse trascorsa da una mosca con cammino sempre uguale. Dico *sempre uguale*; poichè sebbene il moto del Sole non sia esattamente uniforme, gli Astronomi correggono le sue ineguaglianze; e colla distribuzione che ne fanno sopra la totalità del moto, formano un moto *medio*, che può riguardarsi come uniforme.

L' anno dividesi, come ognuno sa, in *mesi*, *giorni*, *ore*, *minuti*, *secondi*, &c. I rapporti di queste quantità sono troppo noti, perchè mi fermi a spiegarli.

Del rimanente, qualunque sia il moto che si trascelga per servire di misura o di *scala* al tempo, tutti i diversi tempi che si considereranno nella Meccanica, saranno formalmente o tacitamente paragonati col moto preso per unità. Si concepiranno chiaramente questi rapporti, col rappresentare i moti ai quali sono proporzionali i tempi, per mezzo di linee rette che fossero percorse da un mobile nella medesima maniera.

13. Un corpo si muove più o meno *velocemente*, secondo che trascorre più o meno spazio in un dato tempo. Dunque la *velocità* è il rapporto dello spazio trascorso al tempo impiegato a trascorrerlo, o sia *il quoto che risulta dal dividere lo spazio trascorso, pel numero delle misure del tempo durante il quale è stato trascorso.*

Di fatti egli è chiaro che non si può conoscere la velocità se non che per la combinazione di questi due elementi, lo spazio ed il tempo, uno de' quali tende ad accrescerla, e l' altro, a diminuirla. Imperciocchè se, per esempio, mi si dice, che due Viaggiatori, i quali partono da Parigi, sono andati uno a Brest, l' altro a Mezieres, avrei torto d' asserire da questa semplice enunciazione, che il primo Viaggiatore ha camminato più velocemente del secondo, benchè abbia percorso uno spazio più grande. Per poter paragonare i due viaggi, devo aver riguardo non solo agli spazj percorsi, ma eziandio ai tempi ne' quali sono stati percorsi. Supponiamo la distanza da Parigi a Brest = 129 leghe, quella da Parigi a Mezieres = 51 leghe; supponiamo inoltre, che il primo Viaggiatore abbia camminato 140 ore, ed il secondo 48 ore. Vedo subito, che il primo Viaggiatore, lungi d' aver camminato più veloce, ha camminato più lentamente del secondo; giacchè in 1 ora, il primo ha fatto solamente li $\frac{129}{140}$ d'una lega, ed il secondo ha fatto $\frac{51}{48}$

leghe, cioè a dire 1 lega intera, più li $\frac{3}{48}$ d' una lega. Le due velocità stanno tra loro come i numeri $\frac{112}{140}$ e $\frac{51}{48}$, quoti degli spazj trascorsi, divisi pei tempi rispettivi duranti i quali sono stati trascorsi.

Nulla avvi in queste divisioni, che ripugni alla loro natura aritmetica; perciocchè esse riduconsi a dividere degli spazj che si possono riguardare come numeri concreti, pei numeri (astratti) delle misure de' tempi; il che dà per quoti degli spazj percorsi durante l' unità di tempo. Gli spazj devono essere valutati in misure della medesima specie, come in tese, piedi, pollici, linee, &c; e similmente bisogna ridurre i tempi in misure dello stesso genere, come in ore, minuti, secondi, terzi &c.

Questa nozione della velocità si adatta egualmente al moto assoluto ed al moto relativo.

14. Il moto assoluto ed il moto relativo possono esistere ciascuno separatamente, ovvero combinarsi l' uno coll' altro. Mi spiego con un esempio.

Supponiamo, che il globo della Terra sia in un' immobilità perfetta. Egli è chiaro che un uccello fermo in un naviglio trasportato dalla corrente d' un fiume, è in moto per rapporto agli oggetti situati sulla riva, poichè si può supporre, ch' ei faccia un solo e medesimo corpo col naviglio che cangia continuamente di luogo per rapporto a questi oggetti: esso adunque è in moto nello spazio assoluto; ma è in quiete nel naviglio che è lo spazio relativo. Si rileva parimente che se, mentre il naviglio è trasportato dalla corrente, l' uccello resti sospeso in aria, ci sembrerà allontanarsi dal naviglio con una velocità eguale e contraria a quella, che trasporta quest' ultimo corpo, e corrisponderà sempre ai medesimi punti dello spazio assoluto, mentre cangerà continuamente di distanza per rapporto ai punti del naviglio; e conseguentemente sarà in quiete nello spazio assoluto, ed in moto nello spazio relativo.

Immaginiamoci ora che il naviglio abbia una velocità di 2500 tese per ora, e che, durante questo stesso tempo, l' uccello s' allontani di 1200 tese, dal naviglio, andando in direzione contraria, ovvero andando nella medesima direzione. Nell' uno e nell' altro caso, l' uccello che è in moto per rapporto allo spazio relativo o sia al naviglio da cui allontanasi di 1200 tese per ora, è pure in moto per rapporto allo spazio assoluto. Di fatti, se viaggia in direzione contraria al naviglio, la sua velocità nello spazio assoluto è l' eccesso della velocità del naviglio sopra la velocità colla quale se ne allontana; quindi ha nello spazio assoluto, e nella direzione del moto del naviglio, una velocità di 1300 tese per ora. Se al contrario l' uccello viaggia nella direzione del naviglio, la sua velocità nello spazio assoluto è la somma della velocità assoluta del naviglio, e della velocità che ha per rapporto al naviglio; quindi ha nello spazio assoluto, e nella direzione del moto del naviglio, una velocità di 3700 tese per ora.

Ella è cosa malagevole, e fors' anche impossibile, di decidere in generale se un corpo dato nell' universo sia in quiete o in moto, e se il suo movimento sia assoluto o relativo.

Imperciocchè noi giudichiamo comunemente che un corpo è in quiete, allorchè mantiene la medesima situazione per rapporto a diversi oggetti supposti immobili, per esempio, per rapporto alle stelle fisse; ed al contrario che un corpo è in movimento, allorchè cangia di situazione per rapporto a questi oggetti medesimi. Ora può darsi, che gli oggetti che noi riguardiamo come immobili sieno realmente in moto. Laonde si rileva che la quiete ed il moto sono per se stessi suscettibili di molte varietà che ci possono sfuggire. I moti che fanno l' oggetto della Meccanica ordinaria, si eseguiscono sopra la superficie della Terra; perciò essi il più delle volte non sono altro, in sostanza, che moti relativi, giacchè, secondo la vera Astronomia, la Terra rivolgesi negli spazj celesti intorno al Sole nel medesimo tempo che si rivolge intorno al suo asse. Ma si possono considerare come assoluti, col prescindere dal moto proprio della Terra nello spazio assoluto; in seguito si potranno distinguere sopra la superficie della Terra, degli spazj particolari o relativi, capaci di ricevere de' corpi in quiete o in movimento.

Siccome il moto assoluto ed il moto relativo sono sottoposti alle medesime leggi, io li comprenderò l' uno e l' altro sotto il loro nome generico di *moto*, riservandomi ad indicarli, co' loro nomi proprj, qualora le circostanze lo esigano.

15. Egli è evidente che se un corpo è in quiete, non può esso stesso darsi del moto;

ma ha bisogno d' essere eccitato da un agente esterno, che chiamasi *potenza* o *forza*. Quindi la potenza o forza, applicata ad un corpo, gli imprime, o tende ad imprimergli del moto.

Dico *imprime* o *tende ad imprimergli*: perciocchè questi due casi sono differenti, e danno luogo a distinguere due specie di forze; le *forze motrici*, che producono un moto reale ed attuale; le *forze di pressione*, che tendono soltanto ad imprimere del moto, ma non ne producono, perchè il loro effetto viene distrutto dalla resistenza di qualche ostacolo, ó da altre forze opposte. Le velocità che risultano dalle prime, si chiamano *velocità reali*; le velocità che tendono a produrre le seconde, chiamansi *velocità virtuali*. Un corpo, per esempio, che cade liberamente da 15 piedi d' altezza, acquista, in virtù de' colpi ripetuti della gravità, una velocità reale, capace di fargli percorrere uniformemente 30 piedi in 1 secondo, come spiegheremo in appresso: quindi la somma de' colpi dati dalla gravità, durante la caduta da 15 piedi, è una forza motrice, che produce una velocità reale, uniforme, di 30 piedi per secondo. Ma se un corpo, animato dalla gravità, venga sostenuto da una tavola che lo impedisca di discendere; allora ciascun colpo della gravità, che è distrutto dalla tavola, ed è seguito da un altro colpo similmente distrutto, è una forza di pressione, che tende a produrre, ma non produce una velocità attuale.

16. Ogni forza, qualunque sia la sua na-

tura, non può essere misurata che dal suo effetto. Ora che fa la forza? Ella trasporta o tende a trasportare una data quantità di materia, da un luogo dello spazio in un altro luogo, durante un dato tempo. Due cose pertanto sono da considerarsi nell' effetto della forza: vale a dire, 1.° la massa trasportata realmente o virtualmente; 2.° la velocità reale o virtuale, con cui questa massa viene trasportata. Quindi l' effetto risultante è la velocità comunicata a tutti i punti della massa; o sia ripetuta tante volte quanti sono i punti nella massa; ovvero, ciò che è ancora la stessa cosa, *il prodotto della massa nella velocità*. Questo prodotto costituisce la *quantità di moto*, che è reale o virtuale, secondo che è reale o virtuale la velocità.

17. A tenore di questi principj, l' idea precisa, che convien formarsi delle forze che considera la Meccanica, è la seguente. *La forza di pressione è rappresentata dal prodotto d' una data massa, nella velocità che tende a comunicarle*. Tutte le volte che de' prodotti di questa natura saranno eguali, indicheranno pressioni eguali. *La forza motrice è rappresentata dal prodotto della massa nella velocità, ch' essa realmente le comunica*.

18. Si chiama *sistema di corpi* l' aggregato di più corpi legati insieme per mezzo di fili, di verghe, o in altro modo qualunque, ed assoggettati con ciò a non formare che un medesimo tutto, alcuna parte del quale non può risentire dell' azione senza che le altre non ne risentano del pari. E similmente, dicesi *sistema di forze*, l' aggregato di più forze, che agiscono

nel medesimo tempo sopra un corpo o sopra un sistema di corpi, sia coll' ajutarsi scambievolmente, sia col farsi contrasto.

19. Se più forze applicate ad un corpo, o ad un sistema di corpi, si distruggono, per modo che non ne risulti moto alcuno, esse sono in *equilibrio:* modo di essere che differisce dalla semplice quiete, in quanto che la quiete è uno stato puramente ozioso, che esiste in assenza di qualunque forza, laddove l' equilibrio suppone l' esercizio virtuale di più forze che si contrastano e che reciprocamente si annichilano. La determinazione de' rapporti che hanno tra loro più forze che si fanno equilibrio, è l' oggetto della Statica. Questa parte della Meccanica è da alcuni Autori chiamata *la scienza delle forze di pressione*; ella considera principalmente l' equilibrio nelle macchine, istromenti destinati a variare i due elementi d' una potenza proposta, il peso o la velocità, ed a procurare la combinazione la più vantaggiosa relativamente ad un dato fine, come spiegheremo più sotto minutamente.

Se dall' azione delle forze risultino de' movimenti, questi movimenti sono l' oggetto della Meccanica propriamente detta che chiamasi qualche volta in generale *Dinamica:* denominazione compendiosa, che noi adopreremo, benchè la voce di *Dinamica* significhi specialmente la scienza dei moti prodotti o distrutti dall' azione e reazione reciproca di più corpi, che formano un medesimo sistema.

Quest' Opera sarà divisa in due Parti. Nella prima, darò gli elementi della Statica, o sia la teoria generale dell' equilibrio; e farò l' applicazione di questa teoria alle macchine. Nella seconda tratterò del moto; e per maggior chiarezza dividerò questa Parte in due Libri: il primo avrà per oggetto le proprietà generali del moto, qualunque sia il modo onde abbia potuto essere prodotto: nel secondo Libro esporrò le leggi secondo le quali i corpi si comunicano il movimento coll' agire e reagire gli uni sopra gli altri in un modo qualunque; il che fa l' oggetto della Dinamica propriamente detta.

PRIMA PARTE.

ELEMENTI DI STATICA.

CAPO PRIMO.

Principj generali dell' Equilibrio.

20. IN qualunque forza due cose sono da considerarsi, la quantità d' azione ch' essa esercita, e la direzione secondo cui esercita quest' azione. Per paragonare insieme più forze in una maniera esatta e completa, si deve aver riguardo a queste due circostanze. Ora noi adempiremo l' uno e l' altro oggetto, col prendere sopra le direzioni delle forze proposte delle linee rette che loro sieno proporzionali; perciocchè queste linee esprimeranno ad un tempo le quantità d' azione delle forze, e la direzione secondo cui queste forze agiscono. Siano, per esempio, due forze P e Q (Fig. 1), che urano un corpo A per mezzo di due fili o di Fig. 1.
due verghe nella direzione AP, AQ; e supponiamo che la potenza P sia doppia della potenza Q. Prenderò sopra AQ, direzione della potenza Q, la parte arbitraria AC per rappre-

sentare questa potenza, ed in seguito sopra AP, direzione della potenza P, la parte AB doppia di AC, per rappresentare questa potenza. Con ciò, gli effetti completi delle due potenze Q e P saranno espressi dalle linee AC, AB. Se queste stesse potenze avessero tra loro qualunque altro rapporto, prenderei le linee AC, AB, in questo rapporto; cioè a dire stabilirei la proporzione $Q : P :: AC : AB$.

Spesse volte, per abbreviare l'espressione, chiamansi le forze coi nomi delle linee che le rappresentano. Così, volendo denotare la forza P per mezzo del suo effetto completo, in vece di dire *la potenza rappresentata dalla parte* AB *della sua direzione*, si dice semplicemente *la potenza* o *la forza* AB.

21. Le forze essendo quantità della medesima specie, o sempre riducibili alla medesima specie, devono essere valutate per mezzo d'una stessa misura comune alla quale si riferiranno. Ora, siccome noi dappertutto riscontriamo de' corpi pesanti, ed inoltre abbiamo un'idea chiarissima delle pressioni che producono; così nulla avvi più semplice e più naturale quanto di prendere un dato peso per l'unità delle forze di pressione. Prendiamo, per esempio, la libbra per quest'unità: le due forze Q e P essendo supposte essere nel rapporto di 1 a 2; se la forza Q è equivalente ad un peso di 12 libbre, la forza P sarà equivalente ad un peso di 24 libbre.

Non ho bisogno di far osservare che paragonando tutte le specie di forze di pressione

de'

a de' pesi, il paragone non cade che sopra le quantità, e che una forza deve sempre supporsi agire secondo la sua propria direzione.

ASSIOMI.

22. I. *Un punto non può andare per più strade nel medesimo tempo*. Quindi allorchè parecchie forze sono applicate ad un punto, o ad un corpo tutta la massa del quale può supporsi concentrata in un medesimo punto; o questo corpo non si muoverà nulla affatto, o si muoverà per una sola strada, nella stessa maniera, che se fosse spinto da una forza unica, equivalente, quanto all' effetto in questa direzione, a tutte le forze proposte.

Questa forza, che produce così in una data direzione il medesimo effetto di parecchie altre forze, chiamasi la *risultante*; e queste forze si chiamano *forze componenti*, per rapporto alla risultante. Trovare la risultante quando si hanno le forze componenti, è ciò che chiamasi *la composizione delle forze*, e trovare le forze componenti, quando si ha la risultante, è ciò che chiamasi *la decomposizione delle forze*.

II. *Due forze uguali e direttamente opposte si distruggono o si fanno equilibrio*. Imperciocchè non vi è alcuna ragione per cui una prevalga all' altra. *E reciprocamente, quando due forze si distruggono, esse sono necessariamente uguali e direttamente opposte*. Imperciocchè egli è visibile che una forza non può essere distrutta se non che da un ostacolo situato sopra la sua direzione?

Di qui ne segue 1.° che vi è equilibrio tra molte forze applicate ad un medesimo punto, o quando la risultante di tutte queste forze è uguale a zero per tutti i versi; o, quando una qualunque delle forze è uguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le altre; o, quando la risultante di due qualunque delle forze è uguale e direttamente opposta alla risultante delle forze che rimangono; o, quando la risultante di tre qualunque delle forze è uguale e direttamente opposta alla risultante delle forze che rimangono; o, &c. Tutte queste condizioni che al primo aspetto possono sembrare differenti, tendono al medesimo scopo, cioè all' eguaglianza di due forze direttamente opposte; il che produce necessariamente l'equilibrio. Nel primo caso in cui tutte le forze hanno una risultante uguale a zero per tutti i versi, questa forza può supporsi distrutta per ogni verso da una forza contraria che è altresì zero.

2.° Reciprocamente, se più forze applicate ad un medesimo punto si fanno equilibrio; quest' equilibrio ha luogo, o perchè la risultante di tutte queste forze si riduce a zero per tutti i versi; o, perchè una qualunque delle forze è uguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le altre; o, perchè la risultante di due qualunque delle forze è uguale e direttamente opposta alla risultante delle forze che rimangono; o, &c.

III. *Se una forza agisce sopra un corpo perpendicolarmente ad una linea o ad un piano, ella* *non potrà imprimere alcun moto al corpo, parallelamente a quest'a linea o a questo piano.* Imperciocchè non vi è alcuna ragione per cui la forza ecciti, piuttosto per un verso che per un altro, del moto parallelo alla linea o al piano proposto; e conseguentemente questo moto parallelo è nullo per tutti i versi.

POSTULATI.

23. I. *Che sia lecito di considerare una forza come applicata a qualsivoglia punto della sua direzione.* Questo postulato non può essere rigettato, poichè una forza in qualunque luogo della sua direzione sia applicata, esercita sempre la medesima azione per lo stesso verso. Così, quando due potenze P e Q (Fig. 2.) tirano un corpo A, si può supporre che queste due potenze, invece di essere applicate in P e Q, lo siano al punto A, essendo le loro azioni dirette sempre pei versi AP, AQ. Si può anche supporre che sieno applicate in P' e Q', e che spingano il corpo A, per mezzo di verghe inflessibili $P'A$, $Q'A$. Lo stesso dicasi per tutti gli altri punti delle loro direzioni. Fig. 2.

II. *Che i corpi ai quali immagineremo che sieno applicate le forze, si possano considerare come non gravi.*

Allorchè dovrà aversi riguardo alla gravità d'un corpo, si potrà ancora considerarlo come non grave, supponendo che la sua gravità sia una forza esterna che lo spinge dall'alto al basso, e che combinasi colle altre forze alle quali può essere sottopposto ?

24 Prop. I. Teor. *Se due potenze* P *e* Q
Fig. 3. (Fig. 3.) *tirano un corpo* A *pel medesimo verso* AQ, *ne risulterà sopra questo corpo la stessa azione che se fosse tirato pel verso medesimo da una forza unica uguale alla somma delle due potenze* P *e* Q.

Ciò è evidente, poichè le potenze P e Q possono supporsi applicate amendue al medesimo punto (Post. I.), ed allora la potenza applicata a questo punto è $P+Q$.

25. Corollario I. Dunque per fare equilibrio colle due potenze P e Q, conviene opporre loro nella direzione di AS una forza $S=P+Q$.

26. Corollario II. Se un numero qualunque di forze tiri un corpo secondo la medesima direzione, bisognerà per far con esse equilibrio, opporre loro nella direzione contraria una forza uguale alla loro somma. Imperciocchè prendendo primieramente due di queste forze, esse riduconsi ad una sola, uguale alla loro somma; combinando questa forza con una terza, si avrà ancora una forza uguale alla loro somma; e così di seguito. Dunque, &c.

27. Prop. II. Teor. *Se due potenze* P *e* Q
Fig. 4. (Fig. 4.) *tirano in parti direttamente contrarie* AP, AQ *un corpo* A; *ne risulterà a questo corpo, nella direzione della più forte* P, *la stessa azione che se fosse tirato in questa direzione da una forza unica, uguale alla differenza delle due forze* P *e* Q.

Imperciocchè rappresentando con AB ed

AC le due potenze *P* e *Q*, e considerando la potenza *P* come divisa in due altre forze espresse da *AD* e da *DB*, la prima delle quali *AD* è uguale e direttamente contraria ad *AC*: egli è evidente (Ass. II.) che le due forze *AD*, *AC* si distruggono, e che non rimane per muovere il corpo *A*, se non che la sola forza *DB* uguale alla differenza delle due forze *AB*, *AC*, cioè a dire, di *P* e *Q*.

28. Corollario I. Dunque, per fare equilibrio colle due forze *P* e *Q*, bisogna impiegare nella direzione di *AS* una forza $S = P - Q$.

29. Corollario II. Se siavi un numero qualunque di forze applicate ad un corpo, alcune delle quali tirino per un verso, e le altre pel verso direttamente opposto, e che la somma delle prime sia uguale alla somma delle seconde, vi sarà equilibrio nel sistema. Ma se una delle somme supera l' altra, converrà, per l' equilibrio, aggiugnere alla somma più piccola una forza eguale alla differenza delle due somme proposte.

30. Prop. III. Lemma. *Se una potenza* P (Fig. 5) *tiri un corpo* A *perpendicolarmente alla retta* EG, *ella gli imprimerà del moto soltanto pel verso* AP; *ed* (Ass. III.) *non gliene darà alcuno, nè pel verso* AE, *nè pel verso* AG. *Ma se la potenza* P *tiri obbliquamente per rapporto ad* EG, *ella allontanerà nel medesimo tempo il corpo dalla retta* EG, *e dalla perpendicolare* AZ.

Fig. 5.

Fig. 6.

Questo Lemma è evidente, e non ha bisogno, per vederne la verità, che d'essere enunziato.

31. COROLLARIO. Rappresentiamo la potenza *P* (Fig 6) colla parte *AB* della sua direzione; e dal punto *B*, guidiamo le perpendicolari *BE*, *BF* alle rette *AE*, *AZ*. Egli è chiaro che la potenza *P* tirando il corpo da *A* in *B*, lo allontanerà dalla retta *AE*, d'una quantità espressa da *EB* o da *AF*; e dalla retta *AZ*, d'una quantità espressa da *FB* o da *AE*. Quindi, per rapporto al primo allontanamento, il corpo è nello stesso caso che se fosse spinto da una forza rappresentata da *AF*; e per rapporto al secondo allontanamento, è nello stesso caso che se fosse spinto da una forza rappresentata da *AE*

Fig. 6.

32. PROP. IV. TEOR. *Se due potenze* P *e* Q (Fig. 7 e 8) *tirino un corpo* A, *secondo le direzioni* AP, AQ, *che formano un angolo* PAQ, *e sono rappresentate dalle parti* AB, AC *delle loro direzioni; ne risulterà a questo corpo la stessa azione che se fosse spinto da una forza unica rappresentata dalla diagonale* AD *del parallelogrammo* ABDC.

Fig. 7. e 8.

Possono accadere due casi: o i due angoli *PAD*, *QAD*, formati dalle direzioni delle forze colla diagonale sono acuti; ovvero uno, per esempio *QAD*, è ottuso, essendo l'altro necessariamente acuto. Non fo alcuna distinzione relativamente all'angolo retto, perchè quest'angolo può egualmente riferirsi all'angolo acuto o all'angolo ottuso, come loro limite comune.

I. Caso Fig. 7. Egli è chiaro che le due forze *P* e *Q* non agendo nè pel medesimo verso, ne per versi direttamente contrarj, devono in parte distruggersi, ed in parte sommarsi. E siccome (Ass. II. e n.° 24) delle forze non possono distruggersi o sommarsi, se non in quanto che agiscono per versi contrarj o pel verso medesimo; le due forze proposte *P* e *Q* possono considerarsi come le risultanti di quattro forze, due delle quali agiscono per versi contrarj, mentre le altre due agiscono pel verso medesimo. Ora il corpo non può andare che per una sola strada (Ass. I.); e la strada che prenderà è evidentemente quella delle forze cospiranti, poichè esse lo spingono l' una e l' altra pel medesimo verso, senza che nulla si opponga a questo movimento. Dunque 1°. le due forze opposte devono distruggersi; altrimenti il corpo avrebbe del moto nella direzione della più grande, ed anderebbe per due strade: il che è impossibile. 2°. Le due forze cospiranti devono essere perpendicolari alle altre due; perciocchè se questa perpendicolarità non avesse luogo, il corpo prenderebbe (30, Caso II.), tanto per un verso, quanto pel verso contrario, un moto parallelo alla linea retta sulla quale cadono le direzioni delle forze opposte; e queste forze non sarebbero totalmente distrutte; il che è contrario a ciò che abbiamo stabilito. Tali sono le due condizioni alle quali deve soddisfare l' espressione della risultante delle due forze *AB*, *AC*. Fig. 7.

Guidate dal punto A, nel piano delle due potenze AB, AC, e perpendicolarmente alla diagonale AD, la retta EG; e compite i due rettangoli $AEBF$, $AGCH$. Supponendo che in luogo della forza AB, si sostituiscano le due forze AF, AE; ed in luogo della forza AC, le due forze AH, AG: le due forze AF, AE esprimeranno rispettivamente (31) le quantità colle quali la forza AB tende ad allontanare il corpo dalle rette EG, AD; e similmente le due forze AH, AG esprimeranno le quantità colle quali la forza AC tende ad allontanare il corpo dalle rette medesime EG, AD.

Ciò posto: dico che per la sostituzione delle quattro forze AF, AE, AH, AG, in luogo delle due forze AB, AC, le due condizioni proposte saranno adempite. Imperciocchè primieramente, le forze AF, AH sono cospiranti, e perpendicolari alle forze opposte AE, AG. Inoltre, i due triangoli rettangoli ABF, DCH, che hanno le ipotenuse AB, DC eguali, e tutti gli angoli eguali ciascuno a ciascuno, sono perfettamente uguali (Geom. 55). Dunque $BF = CH$; ma $BF = AE$, e $CH = AG$; dunque $AE = AG$. Quindi le due forze direttamente opposte AE, AG sono eguali, e conseguentemente si distruggono. Dunque delle quattro forze sostituite non rimangono che le due forze AF, AH; ed il corpo è mosso esattamente nella stessa maniera che se risentisse unicamente l' azione di queste due forze. Ora, agendo esse pel medesimo verso, la loro risultante è (24) $AF + AH = AF + FD = AD$, per essere $FD = AH$. Dunque le due forze proposte AB, AC, possono ridursi ad una forza unica espressa dalla diagonale AD. E siccome il corpo non può andare che per una sola strada, e che conseguentemente la risultante delle due forze AB, AC è *unica*: indi ne segue che questa risultante *potendo* essere espressa dalla diagonale AD, *è* realmente ed unicamente espressa da questa diagonale medesima.

II. Caso, Fig. 8. Guidate dal punto A, nel piano delle due potenze, e perpendicolarmente alla diagonale AD, la retta EG; e compite i due rettangoli $AEBF$, $AGCH$. In luogo della forza AB, potrete prendere (Caso I.) le due forze AE, AF; ed in luogo della forza AC, le due forze AG, AH. Ora le due forze AE, AG, sono direttamente opposte, ed inoltre uguali. Dunque si distruggono. Rimangono quindi le due sole forze AF, AH; e poichè esse agiscono in direzioni contrarie, la loro risultante è uguale (27) alla loro differenza; e conseguentemente ha per espressione $AF - AH$, ovvero (per essere $AH = DF$) $AF - DF$, o sia la diagonale AD. Fig. 8.

Si vede nell'uno e nell' altro caso, che i due lati AB, AC, e la diagonale AD d' un parallelogrammo essendo nel medesimo piano, due forze le cui direzioni concorrono in un punto, e la loro risultante, sono pure nel piano medesimo.

33. Corollario I. Segue da due casi che se in generale due forze sono rappresentate dai lati contigui ad un medesimo angolo.

d' un parallelogrammo qualunque, si può loro sostituire una forza unica rappresentata dalla diagonale corrispondente del medesimo parallelogrammo, e reciprocamente in vece d' una forza espressa dalla diagonale d' un parallelogrammo, si possono prendere due forze espresse dai lati del medesimo parallelogrammo, adjacenti a questa diagonale.

34. COROLLARIO II. Dunque, per trovare una potenza che faccia equilibrio colle due
Fig. 9. potenze *P* e *Q* (Fig. 9), le cui direzioni concorrono al punto *A*, e sono espresse dalle parti *AB* ed *AC* di queste direzioni, bisogna compire il parallelogrammo *ABDC*, ed avendo prolungata la diagonale *DA* al di là del punto *A*, si applicherà secondo questa direzione *AK* una potenza *S*, espressa con una parte *AK* uguale ad *AD*: questa potenza (Ass. II.) farà equilibrio colle altre due *P* e *Q*, poichè sarà uguale e direttamente opposta alla loro risultante R.

35. COROLLARIO III. Le due potenze *P* e *Q*, e la loro risultante *R*, essendo espresse dai lati *AB*, *AC*, e dalla diagonale *AD* del parallelogramo *ABDC*, si ha questa serie di rapporti eguali, $P : Q : R :: AB : AC$ o $BD : AD$. Ora se si forma un triangolo *MON* i cui lati *MO*, *ON*, *MN* sieno paralleli o perpendicolari ciascuno a ciascuno dei lati *AB*, *BD*, *AD* del triangolo *ABD*; questi due triangoli saranno simili (Geom. 113 e 114). Dunque si avrà $AB : BD : AD :: MO : ON : MN$. Dunque anche $P : Q : R :: MO : ON : MN$. E siccome, per

l' equilibrio, bisogna opporre alla risultante R, una forza S che le sia eguale, si avrà altresì $P : Q : S :: MO : ON : MN$.

36. Corollario IV. Se da un punto qualunque D (Fig. 10) della direzione della risultante R delle due potenze P e Q, si abbassino le perpendicolari DE, DF, sulle direzioni di queste potenze, e si conduca la retta EF, si avrà questa serie di rapporti eguali, $P : Q : R :: DF : DE : EF$. Imperciocchè avendo compito il parallelogrammo $ABDC$, si ha $P : Q : R :: AB : AC$ o $BD : AD$. Ora gli angoli AED, AFD essendo retti, il cerchio descritto sopra AD come diametro, passa pei punti E ed F. Dunque (Geom 85) l' angolo BAD è uguale all' angolo EFD, e l' angolo CAD, o il suo eguale ADB, è uguale all' angolo FED. Quindi i due triangoli ABD, FDE, sono simili, e danno $AB : BD : AD :: DF : DE : EF$. Dunque altresì $P : Q : R :: DF : DE : EF$. Mettendo in questa serie di proporzionali in vece della risultante R, la forza S che le è uguale e contraria, si avrà $P : Q : S :: DF : DE : EF$. Fig. 10.

37. Corollario V. Sussistendo la medesima costruzione, se non si chiedesse che il rapporto di P a Q, si avrebbe $P : Q :: DF : DE$. Laonde si vede che le due potenze P e Q *sono in ragion reciproca delle perpendicolari abbassate da un medesimo punto della direzione della loro risultante sopra le loro proprie direzioni*.

Se si vogliono avere, in un modo analogo, i rapporti delle potenze P e Q alla risultante R, o alla forza S; da un punto qualunque F della direzione della potenza Q, si abbasseranno le perpendicolari Fa, Fb sopra le direzioni delle potenze P ed R; si congiungeranno i punti a e b colla retta ab: parimente, da un punto qualunque E della direzione della potenza P, si condurranno le perpendicolari Eg, Ef sulle direzioni delle potenze Q ed R; e si tirerà gf. Con queste costruzioni, si formeranno due triangoli Fab, Egf simili ciascuno al triangolo ADB. Questa similitudine si dimostrerà facilmente, se descrivansi successivamente sopra AF ed AE, come diametri, de' cerchj, il primo de' quali passerà necessariamente pei punti a e b, ed il secondo passerà necessariamente pei punti g ed f; indi si conducano, dai punti ove questi cerchj incontrano AD, delle parallele a DB ed a DC. Donde ne segue che si avrà $P : R$ o $S :: Fb : Fa$, e $Q : R$ o $S :: Ef : Eg$.

Quindi in generale *due qualunque delle tre potenze* P, Q, S, *che si fanno equilibrio, sono tra loro in ragion reciproca delle perpendicolari abbassate da un medesimo punto della direzione della terza sulle loro direzioni*.

38. Corollario VI. Questa stessa proprietà può essere presentata sotto un' altra forma. Poichè si hanno le proporzioni $P : Q :: DF : DE$; $P : S :: Fb : Fa$; $Q : S :: Ef : Eg$; si avranno le equazioni $P \times DE = Q \times DF$; $P \times Fa = S \times Fb$; $Q \times Eg = S \times Ef$. Laonde si vede che *tre potenze* P, Q, S *essendo in equilibrio, i prodotti di due tra loro, moltiplicate ciascuna per la distanza del-*

la sua direzione da un medesimo punto della direzione della terza, sono eguali tra loro.

Si chiamano *momenti delle potenze*, queste sorti di prodotti delle potenze nelle distanze delle loro direzioni da un punto, da una linea, o da un piano. I punti, le linee, i piani, per rapporto ai quali si considerano i momenti, in generale, si chiamano *centri di momenti*, *assi di momenti*, *piani di momenti*.

39. COROLLARIO VII. In ogni triangolo (Geom. 259) i lati stanno tra loro come i seni degli angoli opposti. Quindi si avrà *AB*: *BD*: *AD*:: sen. *ADB* o sen. *QAR*: sen. *PAR*: sen. *ABD* o sen. *PAQ* (essendo i due angoli *ABD*, *PAQ* supplementi l' uno dell' altro, ed avendo per conseguenza il medesimo seno). Dunque poichè si ha sempre *P*: *Q*: R o *S*:: *AB*: BD: *AD*, si avrà altresì *P*: *Q*: *R* o *S*:: sen. *QAR*: sen. *PAR*: sen. *PAQ*. Laonde si vede *che ciascuna delle tre potenze* P, Q, R o S, *è rappresentata dal seno dell' angolo formato dalle direzioni delle due altre*.

40. PROP. V. PROBLEMA. *Determinare la risultante d' un numero qualunque di potenze* P, Q, R, S, T (Fig. 11) *concorrenti al medesimo* Fig. 11. *punto* A, *e rappresentate dalle parti* AB, AC, AE, AG, AK *delle loro direzioni*.

Compiendo il parallelogrammo *ABDC*, la risultante delle due forze *AB*, *AC*, è espressa dalla diagonale *AD*. Prendo dunque, in vece delle due forze *AB*, *AC*, la forza *AD*. Sopra *AD* ed *AE*, come lati contigui al medesimo angolo *A*, fo il secondo parallelogrammo *ADFE*;

tiro la sua diagonale *AF*; e la risultante delle due forze *AD*, *AE* è la forza *AF*: questa stessa forza è dunque la risultante delle tre forze *AB*, *AC*, *AE*. Sopra *AF* ed *AG*, come lati contigui al medesimo angolo *A*, costruisco il terzo parallelogrammo *AFHG*, tiro la sua diagonale *AH*, e la risultante delle due forze *AF*, *AG*, o sia delle quattro forze *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, è la forza *AH*. Continuando allo stesso modo, sopra *AH* ed *AK*, come lati contigui all' angolo *A*, fo il quarto parallelogrammo *AHLK*; tiro la sua diagonale *AL*; e la risultante delle due forze *AH*, *AK*, o sia delle cinque forze *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, *AK*, è la forza *AL*.

Si rileva esser indifferente che le forze *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*, sieno dirette o no nel medesimo piano. Basta, per trovare la loro risultante come abbiamo fatto, ch' esse concorrano nello stesso punto *A*.

41. Corollario. Dunque, per far equilibrio con tutte le forze *AB*, *AC*, *AE*, *AG*, *AK*, converrà prolungare *LA* indefinitamente verso *M*, ed applicare in questa direzione una forza *M* rappresentata dalla parte *AM* eguale ad *AL*.

42. Prop. VI. Teor. *Due potenze* P *e* Q, *e la* Fig. 12. *loro risultante* R (Fig. 12) *concorrendo al punto* A; *se conducasi una retta qualunque* FE *che incontri in* F, E, D *le loro direzioni* AP, AQ, AR: *dico che ciascuna forza potrà essere rappresentata dal prodotto della parte della sua direzione, compresa tra il punto* A *e la secante, moltiplicata per la parte della secante, compresa fra le direzioni delle*

altre due; cioè a dire, si avrà P : Q : R :: AF×DE: AE×DF: AD×FE.

Dal punto *D* si conducano parallelamente alle direzioni delle potenze *P* e *Q*, le rette *DC*, *DB*, per avere il parallelogrammo *ABDC*. Si avrà *P*: *Q*: *R* :: *AB* o *DC*: *AC* o *BD*: *AD*. Ora i triangoli simili *EAF*, *ECD* danno *EF*: *AF* :: *ED* : $DC = \frac{AF \times ED}{EF}$; ed i triangoli simili *FAE*, *FBD* danno *FE*: *AE* : : *FD*: $BD = \frac{AE \times FD}{FE}$. Quindi si avrà $P : Q : R :: \frac{AF \times ED}{FE} : \frac{AE \times FD}{FE} : AD$. Moltiplicando la serie de' conseguenti per la stessa quantità *FE*, si avrà *P*: *Q*: *R* : : *AF*×*ED* : *AE*×*FD*: *AD*×*FE*.

43. Corollario I. Si guidi parallelamente alla secante *FE* un'altra secante *KG*. Si avrà *AF*: *AE* : *AD* :: *KF*: *GE*: *HD*. Moltiplicando questa serie per la serie identica, *DE* : *DF* : *FE* :: *DE*: *DF*: *FE*: si avrà *AF*×*DE*: *AE*×*DF*: *AD*×*FE* : : *KF*×*DE* : *GE*×*DF*: *HD*×*FE*. Dunque *P* : *Q*: *R* :: *KF*×*DE*: *GE*×*DF*: *HD*×*FE*.

44. Corollario. II. Sussistendo sempre la stessa ipotesi e la stessa costruzione, egli è chiaro che a misura che il punto *A* s' allontana da *FE*, ovvero che l' angolo *PAQ* diventa più acuto, le parti *KF*, *GE*, *HD* tendono all' uguaglianza; di modo che quando il punto *A* è infinitamente lontano, la ragione ultima delle linee *KF*, *GE*, *HD*, è una ragione d' uguaglianza; e le direzioni delle tre potenze diventano parallele, come nella Figura 13. Così la serie delle pro- Fig. 13.

porzionali $P : Q : R :: KF \times DE : GE \times DF : HD \times FE$ diventa (dividendo la serie de' conseguenti per le linee eguali KF, GE, HD), $P : Q : R :: DE : DF : FE$.

45. Corollario III. Di qui ne segue, 1.° che la risultante delle due potenze parallele P e Q, che agiscono pel medesimo verso, è ad esse parallela, come si vede, ed è inoltre uguale alla loro somma, poichè $FE = FD + DE$.

2.° Che la direzione di questa risultante passa per un punto D che ha la proprietà di rendere le due potenze P e Q reciprocamente proporzionali alle distanze, perpendicolari o oblique, del punto D dalle loro direzioni, poichè si ha la proporzione $P : Q :: DE : DF$.

46. Corollario IV. Dunque se suppongasi, Fig. 14 che due potenze parallele P e Q (Fig. 14) sieno applicate alle estremità d' una verga inflessibile FE non grave, e vogliasi determinare il punto da cui deve essere sospesa la verga affinchè vi sia equilibrio, e lo sforzo che soffre il punto di sospensione: non s' avrà che a dividere la retta FE nel punto D, per modo che abbiasi $P : Q : ED : FD$, ovvero $P + Q : P : Q :: FE : ED : FD$, ed applicare in seguito nella direzione DS parallela alle due potenze P e Q, un appoggio o una resistenza $S = P + Q$.

47. Corollario V. Le tre forze P, Q, S dell' articolo precedente, essendo in equilibrio, ciascuna di esse indifferentemente può riguardarsi come facente equilibrio colle altre due, ovvero come uguale e direttamente contraria alla risultante delle due altre. Consideriamo, per esem-

esempio, la potenza Q sotto questo punto di vista: egli è chiaro che questa potenza è parallela alle due forze componenti P ed S; ch' essa è situata al di là del punto D, dalla parte della forza maggiore S; che agisce per lo stesso verso della più debole P delle due forze componenti; e ch' essa è uguale alla loro differenza, poichè si ha $FD = FE - DE$. Si troverà la posizione del punto E, considerando che si ha la proporzione $S : P :: FE : DE$, la quale dà quest' altra $S - P : P :: FE - DE$ o $FD : DE$, in cui i primi tre termini sono noti (*).

48. Osservazione I. L' equilibrio assoluto delle tre forze parallele P, Q, S, richiede necessariamente che abbiasi nello stesso tempo l' equazione $S = P + Q$, e la proporzione $P : Q :: DE : DF$, ovvero l' equazione $P \times DF = Q \times DE$. In virtù della prima equazione, la verga (Ass. II.) non può muoversi parallelamente a se stessa, nè pel verso DS, che è quello della forza S, nè pel verso DR, che è quello della risultante R ossia $(P + Q)$, poichè le forze S ed R sono eguali e direttamente opposte. Ma ciò stabilisce soltanto l' immobilità del punto D della verga; e potrebbe succedere che la verga avesse un moto di rotazione intorno al punto D. Ora questo moto è impossibile, a motivo del-

(*) Quando $S = P$, DE diviene $= \infty$. Dunque quando $S = P$, non si può trovare Q, che allora è impossibile. Veggasi M. D' Alembert *Mem. sur les principes de la Mechanique Art. III. § 1. dans les Mem. de l' Academ. des sciences pour l' année* 1769 à *Paris* 1772. Edit.

la seconda equazione $P \times DF = Q \times DE$. Di fatti, supponiamo per un momento che la verga EF, potesse girare intorno al punto D, e che in un istante ella descrivesse, colle sue estremità, i piccoli archi simili Ee, Ff. Siccome abbiamo $P:Q::DE;DF$, e (Geom. 127), $DE:DF::Ee:Ff$, si avrà $P:Q::Ee:Ff$. Quindi le due forze P e Q sono reciprocamente proporzionali agli spazj che tendono a far percorrere nel medesimo tempo, in virtù de' due moti di rotazione; e conseguentemente questi due moti che si farebbero in direzioni contrarie, scambievolmente si distruggono. Imperciocchè, supponiamo, per esempio, che la parte DF della verga sia di 2 piedi, la parte DE di 4 piedi, la forza P un peso di 6. libbre, ed in conseguenza la forza Q un peso di 3 libbre: gli effetti che producono le rotazioni de' punti E ed F sono, l'uno per rapporto all'altro, come se si trattasse, da una parte, di far percorrere 4 piedi ad un peso di 3 libbre, e dall' altra parte, di far percorrere 2 piedi ad un peso di 6 libbre. Ora egli è visibile che questi due effetti sono eguali; perciocchè noi possiamo dividere il peso di 6 libbre che percorre 2 piedi, in due pesi ciascuno di tre libbre che percorrano ciascuno 2 piedi; il che si riduce ad un solo peso di 3 libbre che percorre 4 piedi. Dunque i due moti di rotazione devono reciprocamente annicchilarsi, o sia ciò che torna allo stesso, non possono aver luogo nè l'uno nè l'altro.

Quindi, in virtù delle due equazioni proposte, la verga non può avere nè moto di traslazione, parallelamente a se stessa, nè moto di rotazione intorno al punto D. Ella non può nemmeno avere del moto di rotazione intorno a qualche altro punto, poichè essendo impedita nel medesimo tempo di muoversi parallelamente a se stessa, e di girare intorno al punto D, è necessariamente in un' immobilità assoluta.

Non ho bisogno di far osservare che la verga non può muoversi nella direzione della sua lunghezza, poichè non vi è alcuna forza che agisca per questa parte.

49. Osservazione II. Se in luogo d' una delle forze, per esempio, in luogo della forza Q, si sostituisca una forza parallela q, applicata in M, e tale che abbiasi $q : Q :: DE : DM$, o sia $q \times DM = Q \times DE$; le due forze q e Q tenderanno a produrre lo stesso moto di rotazione intorno al punto D. Quindi, per rapporto ad un tal movimento, queste due forze sono egualmente atte a contrabbilanciare la potenza P. Dunque non vi sarà alcun moto di rotazione intorno al punto D, se si sostituisca q in luogo di Q, e che abbiasi l' equazione $P \times DF = q \times DM$. Ma allora la verga avrà un moto di traslazione, parallelamente a se stessa. Imperciocchè per impedire quest' ultimo moto, converrebbe applicare nella direzione DS una forza $= P + q = P + \frac{Q \times DE}{DM}$, forza che differisce da $S = P + Q$.

Di quì si vede che s' impedirà sempre il moto di rotazione intorno ad un dato punto, col sostituire le une nel luogo delle altre, delle forze che sieno reciprocamente proporzionali alle distanze delle loro direzioni da questo punto, ma bensì allora la pressione di questo punto cresce o diminuisce, e per conseguenza, se vogliasi impedire anche il moto di traslazione, la resistenza dell' appoggio si deve prendere, in ogni caso, secondo la legge che abbiamo stabilita.

Nel calcolo delle macchine, si fanno spesso delle sostituzioni di forze, per impedire i moti di rotazione; e non si fa alcun caso delle pressioni che soffrono gli appoggi i quali sono immobili, ed hanno d'ordinario maggior resistenza del bisogno. Ma si caderebbe in errore, se si credesse che gli appoggi saranno, in tutti i casi, egualmente aggravati.

50. Prop. VII. Probl. *Determinare la risultante di più forze parallele che agiscono per lo stesso verso.*

Sia un numero qualunque di còrpi A, B,
Fig. 15 C, D (Fig. 15.), situati o no nel medesimo piano, e sottoposti all' azione delle forze parallele P, Q, R, S, che agiscono per lo stesso verso. Immaginiamoci che tutti questi corpi siano legati tra loro per mezzo delle verghe inflessibili AB, BC, CD, DA, non gravi, e che formino un solo e medesimo sistema. Ciò posto, le due forze P e Q hanno per risultante (45) una forza X che è loro parallela, la di cui quantità è $P+Q$, e la cui direzione passa pel punto E, per modo che si ha, $P:Q::BE:AE$. Sostituiamo invece delle due forze P e Q, la forza X, e guidiamo la retta EC: le due forze X ed

R avranno per risultante la forza $Y = X + R$ $= P + Q + R$, ed il punto G in cui essa taglia EC, sarà tale che si avrà X o $P + Q : R$ $:: CG : EG$. Prendiamo in vece delle due forze X ed R, o delle tre forze P, Q, R, la forza Y; e condotta la retta GD, vedremo che le due forze Y ed S hanno per risultante la forza $Z = Y + S = P + Q + R + S$, e che il punto F, per dove passa la direzione della forza Z, è tale che si avrà, Y o $P + Q + R : S ::$ $DF : GF$. Dunque la forza Z è la risultante di tutte le forze proposte P, Q, R, S; e si determinerebbe nello stesso modo successivamente la forza risultante, se il numero delle forze componenti fosse più grande.

51. Corollario I. Dunque (Ass. II.), per far equilibrio con tutte le forze P, Q, R, S, fa d'uopo di applicare nella direzione ZF una forza $V = P + Q + R + S$.

52. Corollario II. Se tutte le forze parallele P, Q, R, S, non agissero per lo stesso verso, si comincerebbe a determinare separatamente ciascuna risultante delle forze che agiscono pel verso medesimo. Con ciò si avrebbero due risultanti dirette in parti contrarie, e si troverebbe la forza che può far loro equilibrio, per mezzo dell'articolo 47.

53. Osservazione I. In vece di supporre, come abbiamo fatto, che le forze P, Q, R, S, sieno applicate ai punti A, B, C, D, possiamo (23. Post. I.) supporle applicate ai punti qualunque a, b, c, d delle loro direzioni; ed allora troveremo che le nuove risultanti X, Y, Z, che sono sempre

parallele alle forze componenti, passano pei punti e, g, f, intersezioni delle rette ab, ec, gd, colle rette EX, GY, FZ primieramente determinate. Imperciocchè (45) nel secondo caso, il punto e per dove passa la risultante delle due potenze P e Q, è tale che $P:Q::be:ae$. Ora per le parallele AP, BQ, EX, si ha $be:ae::BE:AE$. Dunque il punto e è l'intersezione delle rette ab, EX. Medesimo ragionamento per le altre risultanti. Inoltre, le quantità di forza delle risultanti sono sempre le stesse. Quindi, la direzione e la quantità della risultante finale Z sono sempre le medesime, qualunque sieno i punti delle loro direzioni a cui si suppone che le forze componenti siano applicate.

Ciò è egualmente vero, coi debiti cangiamenti, pel caso in cui le forze non agissero per lo stesso verso.

54. Osservazione II. Se le forze applicate ai corpi A, B, C, D, permanendo sempre le stesse in quantità, pigliassero delle altre direzioni qualunque Ap, Bq, Cr, Ds, sempre parallele tra loro; e si denominassero x, y, z, le risultanti analoghe ad X, Y, Z: le nuove risultanti sarebbero eguali ciascuna a ciascuna delle prime; ed inoltre la risultante x passerebbe pel punto E; la risultante y, pel punto G; e la risultante z, pel punto F. Dunque vi è sempre nella direzione della risultante finale d'un numero qualunque di forze parallele, agenti o no per lo stesso verso, un punto F tale che se le forze, senza cangiare di quantità, e senza cessare d'esser parallele, e d'essere applicate ai

medesimi luoghi d' un sistema di corpi, cangino altronde *similmente* di direzioni in tutti i modi possibili, tutte le risultanti finali (che hanno lo stesso valore), si taglieranno in questo punto.

Questo punto insigne, può, per la sua proprietà, chiamarsi *centro delle forze parallele*.

55. PROP. VIII. TEOR. *Due Potenze* P *e* Q, *e la loro risultante* R (Fig. 16 e 17), *concorrendo al punto* A; *se da un punto qualunque* E, *preso nel piano di queste potenze, si abbassino le perpendicolari* EF, EG, EH, *sopra le loro direzioni* AP, AQ, AR: *si avrà* Fig. 16, e 17.

$$Q \times EG + P \times EF = R \times EH \text{ (Fig. 16.)},$$
$$Q \times EG - P \times EF = R \times EH \text{ (Fig. 17.)}.$$

Cosicchè la somma o la differenza de' momenti delle forze P *e* Q, *per rapporto al punto* E, *è uguale al momento della risultante* R, *per rapporto al punto medesimo*.

Costruito il parallelogrammo $ABCD$ sopra le direzioni delle tre potenze, si avrà $P:Q:R::AB:BD:AD$. Guidate la retta AE, e sopra questa linea, come diametro, descrivete il cerchio $AMEG$, che passerà necessariament (Geom. 86) pei punti F, G, H, poichè gli angoli EFA, EGA, EHA sono retti. Tirate le corde FH, HG; e dal punto B, guidate, parallelamente ad AE, la retta BK, che incontri in K, la retta AR (Fig. 16), o il suo prolungamento AS (Fig. 17). I due triangoli ABK, EHF sono simili: poichè l'angolo ABK è uguale al suo alterno EAF (Geom. 65), e questo è uguale all'angolo EHF (Geom. 85); di più, i due angoli BAK, HEF

sono eguali (Geom. 85 e 87). Questi triangoli simili danno la proporzione, $AB:EH::AK:EF$, e quindi, $AB\times EF = EH\times AK$.

I due triangoli DBK, EHG sono parimente simili, pei medesimi articoli citati della Geometria, e quindi danno, $DB:EH::DK:EG$, o sia $DB\times EG = EH\times DK$.

Sommando le due egualtà (Fig. 16), o sottraendo l'una dall' altra (Fig. 17), si avrà

$DB\times EG + AB\times EF = AD\times EH$ (Fig. 16),

$DB\times EG - AB\times EF = AD\times EH$ (Fig. 17).

Ponendo in vece delle linee AB, DB o AC, AD, le forze P, Q, R, che queste linee rappresentano, e riunendo i due casi mediante il doppio segno $\pm$ posto innanzi al secondo termine, si avrà

(A) $Q\times EG \pm P\times EF = R\times EH$.

56. Osservazione I. Se alla risultante R, oppongasi direttamente una forza S che le sia uguale, vi sarà equilibrio fra le forze P, Q, S; e l' equazione (A) (surrogando S ad R), diverrà $Q\times EG \pm P\times EF = S\times EH$.

Siccome di molte forze in equilibrio, è in nostro arbitrio di pigliare quella che si vuole per una forza eguale e direttamente opposta alla risultante di tutte le altre (Ass. II.); perciò consideriamo 1.° la forza Q sotto questo punto di vista, e mettiamo l' equazione precedente sotto questa forma, $S\times EH \mp P\times EF = Q\times EG$, ovvero sotto quest' altra (chiamando Q' la risultante delle due forze P ed S, la quale è uguale e direttamente opposta a Q), $S\times EH \mp P\times EF = Q'\times EG$: allora vedremo che la differenza o la somma de' momenti delle forze componenti S e P è uguale al momento della loro risultante Q'. Il primo caso ha luogo nella Figura 16, perchè allora il punto E cade dentro l' angolo PAS formato dalle direzioni delle due forze componenti P ed S; ed il secondo ha luogo nella Figura 17, perchè allora il punto E cade fuori dell' angolo PAS. Fig. 16.

2°. Consideriamo la forza P come uguale e direttamente opposta alla risultante delle due forze Q ed S, e chiamiamo P' questa risultante; troveremo, $\pm(S\times EH - Q\times EG) = P'\times EF$. Quindi, per le due figure, la differenza de' momenti delle forze componenti è uguale al momento della risultante, perchè nell' una e nell' altra Figura, il centro di momento cade nell' angolo QAR opposto al vertice all' angolo QAS formato dalle direzioni delle forze componenti. Ma (Fig. 16.) questo centro cade di quà dell' angolo $P'AS$, o sia del suo opposto al vertice PAR, e la differenza de' momenti delle forze S e Q è $S\times EH - Q\times EG$; laddove (Fig. 17) il punto E cade nell' angolo PAR opposto al vertice all' angolo $P'AS$, il che dà $Q\times EG - S\times EH$ per la differenza de' momenti delle due forze Q ed S.

57. Osservazione II. Di quì ne segue in generale una regola facile per riconoscere se il momento della forza che riguardasi come la risultante delle altre due, o come uguale e contraria a questa risultante, sia eguale alla somma, o alla differenza de' momenti delle forze componenti, ed in quest' ultimo caso come

si debba prendere la differenza. Riguardate il centro di momento, come un punto fisso, e come il centro comune a due circoli che avessero per raggi le perpendicolari abbassate da questo punto sopra le direzioni o sopra i prolungamenti delle direzioni delle forze componenti. Ciò posto, 1°. se le due forze componenti, atteso il modo con cui sono dirette, tendano a far girare i due circoli per lo stesso verso; il momento della risultante o della forza uguale a questa risultante, è uguale alla somma de' momenti delle forze componenti. 2°. Se le due forze componenti tendano a far girare i due circoli per versi contrarj, il momento della risultante o della forza uguale a questa risultante, è uguale alla differenza de' momenti delle forze componenti; e per avere questa differenza, convien osservare che de' due momenti delle forze componenti, il più grande è quello della forza situata in modo che il centro di momento cada nell' angolo formato dalla direzione dell' altra forza componente con quella della risultante, o sia nell' angolo opposto al vertice a quello che abbiamo indicato.

58. Corollario I. Supponiamo che il punto di concorso *A* si allontani continuamente sino all' infinito, cosicchè alla fine le direzioni delle tre potenze *P*, *Q*, *S*, diventino parallele
Fig. 18, e 19 (Fig. 18 e 19). Egli è chiaro che le nostre equazioni sussisteranno sempre, e che i punti *F*, *G*, *H* saranno presentemente situati sopra la medesima linea retta, perpendicolare alle di-

rezioni delle tre forze. Si avrà inoltre (45), $S = R = P + Q$. Dunque (Fig. 18 e 19),

$$(B)\ Q \times GE \pm P \times FE = (P + Q) \times HE.$$

59. Corollario II. Le potenze P, Q, S, essendo sempre parallele, se dal punto E conducasi una retta qualunque EX (*), e dai punti F, G, H, le parallele FV, GX, HT, verso questa linea; si avrà (Fig. 18 e 19),

$$Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT.$$

Imperciocchè, a motivo de' triangoli simili EFV, EGX, le linee EF, EG, EH essendo proporzionali alle linee FV, GX, HT, se suppongasi $EF = n.FV$, si avrà $EG = n.GX$, $HE = n.HT$. Sostituendo questi valori di EF, EG, HE, nell' equazione (B), e dividendo tutto per n, si avrà $Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT$.

Laonde si vede che la *somma o la differenza de' momenti delle forze parallele* P *e* Q, *per rapporto all' asse* EX, *è uguale al momento della loro risultante, per rapporto all' asse medesimo*.

Egli è indifferente che le distaze FV, GX, HT, siano perpendicolari o oblique all' asse EX.

60. Corollario III. Dall' equazione $Q \times GX \pm P \times FV = (P + Q) \times HT$, si ricava

$$HT = \frac{Q \times GX \pm P \times FV}{P + Q}.$$

Quindi conoscendo la posizione dell' asse EX, e le distanze perpendicolari o oblique, GX, FV, si conoscerà la distanza, perpendicolare o obli-

(*) o nel piano delle tre potenze, o anche in un altro piano. Edit.

qua, del centro H delle forze P e Q, dall'asse EX. Dunque si potrà fissare la posizione di questo centro, prendendo sopra una GX delle distanze, una parte Xa uguale al valore trovato per HT, e guidando la retta aH parallela ad XE.

61. Corollario IV. Allorchè il centro E Fig. 20 cade sopra il centro H (Fig. 20), la distanza HT sparisce; e si ha $Q \times GX - P \times FV = 0$, o sia $Q \times GX = P \times FV$ (*). Laonde si vede che *i momenti delle due forze* P *e* Q, *per rapporto a qualunque asse che passa pel loro centro, sono eguali*.

Fig. 21, e 22 62. Corollario V. Conducasi (Fig. 21 e 22) la retta qualunque fg, che incontri obliquamente in f, g, h, le direzioni delle nostre tre potenze parallele P, Q, S; e dai punti f, g, h, siano tirate le parallele fu, gx, ht verso l' asse Ex che taglia nel punto qualunque E, la retta fg, ed ha una posizione qualunque. Inoltre, si guidi, dal punto E, la retta EG perpendicolare alle direzioni delle tre potenze. Si avranno queste equazioni,

$$Q \times gE \pm P \times fE = (P+Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times fu = (P+Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P+Q) \times Hh.$$

le quali non sono altro che l'equazione (B), sostituendo alle tre linee EF, EG, EH, tre altre

(*) e $Q \times GH = P \times FH$, il che contiene la proprietà dell' equilibrio della leva, la quale per conseguenza trovasi qui rigorosamente dimostrata come al §. 45. Edit.

linee che loro sieno proporzionali, cioè a dire, o le tre linee Ef, Eg, Eh, o le tre linee fu, gx, ht, o le tre linee Ff, Gg, Hh.

Dividendo ciascuna di queste equazioni per $P+Q$, si avranno i valori delle linee hE, ht, Hh.

Egli è chiaro che quando il punto E cade sopra il punto h (Fig. 22), le tre linee Eh, ht, Hh, si annullano, ed allora si ha $Q \times gE = P \times fE$; $Q \times gx = P \times fu$; $Q \times Gg = P \times Ff$.

63. Corollario VI. Se supponiamo che le forze componenti agiscano in direzioni contrarie; che, per esempio, si considerino le due forze P ed S per le componenti, e conseguentemente la forza Q come uguale e direttamente contraria alla loro risultante: le equazioni (Fig. 18, 19, 21, 22),

$$Q \times GE \pm P \times EF = (P+Q) \times HE,$$
$$Q \times GX \pm P \times FV = (P+Q) \times HT,$$
$$Q \times gE \pm P \times fE = (P+Q) \times hE,$$
$$Q \times gx \pm P \times fu = (P+Q) \times ht,$$
$$Q \times Gg \pm P \times Ff = (P+Q) \times Hh,$$

diverranno (osservando (47) che la risultante $= Q = S - P$, ed eliminando Q),

$$S \times HE \mp P \times FE = (S-P) \times GE,$$
$$S \times HT \mp P \times FV = (S-P) \times GX,$$
$$S \times hE \mp P \times fE = (S-P) \times gE,$$
$$S \times ht \mp P \times fu = (S-P) \times gx,$$
$$S \times Hh \mp P \times Ff = (S-P) \times Gg.$$

Si troverebbero delle equazioni analoghe, riguardando P come uguale alla risultante delle forze Q ed S

Queste equazioni fanno vedere ancora che *la differenza o la somma de' momenti delle forze componenti è uguale al momento della risultante.*

Si avranno le linee GE, GX, gE, Gg, dividendo ciascuno de' due membri delle medesime equazioni, per $S - P$.

64. Prop. IX. Teor. *Essendovi un numero qualunque di forze parallele, agenti per lo stesso verso, e situate altronde come si voglia; e considerando i loro momenti per rapporto ad un piano medesimo:*

1°. *Allorchè tutte le forze sono situate da una stessa parte di questo piano, la somma de' loro momenti particolari è uguale al momento della loro risultante.*

2°. *Allorchè le forze sono situate in parte da un lato, ed in parte dall' altro, per rapporto al piano de' momenti; la differenza fra la somma de' momenti delle forze situate da un lato, e la somma de' momenti delle forze situate dall' altro lato, è uguale al momento della loro risultante.*

Fig. 23, e 24 Siavi (Fig. 23 e 24) un sistema di corpi A, B, C, D, disposti ad arbitrio, legati tra loro con delle verghe AB, BC, CD, AD, non gravi, e sottoposti all' azione delle forze parallele P, Q, R, S, che agiscono per lo stesso verso. Supponiamo che dopo aver determinato il centro F di tutte le forze, si conducano verso il medesimo piano YZ di posizione qualunque, le parallele Aa, Bb, Cc, Dd, Ff...

Ciò posto, io dico 1°. che per la Figura 23, ove tutte le forze sono situate da una stessa parte per rapporto al piano YZ, si avrà $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$. Imperciocchè, supponiamo che il punto E sia il centro delle due forze P e Q; guidiamo la retta Ee, parallela alle rette Aa, Bb, &c; ed osserviamo che i tre punti A, B, E, essendo situati sullà stessa linea retta, i tre punti a, b, e, situati nel piano YZ, sono altresì situati sopra la medesima linea retta: si avrà (59, Caso I.) $P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee$. Congiungiamo i punti E e C, colla retta EC: sia G il centro delle tre forze P, Q, R, e si conduca la retta Gg parallela ad Aa, Bb, &c. La forza $(P + Q)$ essendo riguardata come applicata in E, si avrà, sempre pel medesimo articolo 59, $(P + Q) \times Ee + R \times Cc = (P + Q + R) \times Gg$, ovvero mettendo in vece di $(P + Q) \times Ee$ il suo valore, $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc = (P + Q + R) \times Gg$.

Continuando a ragionare nella stessa maniera, si avrà $(P + Q + R) \times Gg + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$, ovvero $P \times Aa + Q \times Bb + R \times Cc + S \times Dd = (P + Q + R + S) \times Ff$.

2°. Per la Figura 24, ove le due forze P e Q agiscono a sinistra, e le due forze R ed S a destra del piano YZ, si avrà, (cadendo il centro F dalla parte di R e di S), $R \times Cc + S \times Dd - P \times Aa - Q \times Bb = (P + Q + R + S) \times Ff$. Imperciocchè, dal centro H delle forze R ed S, e dal centro E delle forze P e Q, si conducano al piano YZ le rette Hh, Ee, parallele alle rette Aa, Bb, &c. Pel primo caso, si avrà $(R + S) \times Hh = R \times Cc + S \times Dd$, e $(P + Q) \times Ee = P \times Aa + Q \times Bb$. Ora, la risultante delle due forze $(R + S)$ e $(P + Q)$, applicate in H ed E, che passa pel punto F, e conseguentemente i tre punti H, E, F essendo situati sopra la medesima linea retta; i tre punti b, e, f, sono altresì situati sopra la medesima linea retta. Quindi si avrà (59, caso II), $(R+S)\times Hb-(P+Q)\times Ee=(P+Q+R+S)\times Ff$. Sostituendo nel primo membro, in vece di $(R+S)\times Hb$, e di $(P+Q)\times Ee$, i loro valori, si avrà $R\times Cc+S\times Dd-P\times Aa-Q\times Bb=(P+Q+R+S)\times Ee$.

65. Corollario I. Comprendendo i due casi (Fig. 23 e 24), nella medesima equazione generale, $R\times Cc+S\times Dd\pm P\times Aa\pm Q\times Bb=(P+Q+R+S)\times Ff$, e liberando Ff, si avrà

$$Ff=\frac{R\times Cc+S\times Dd\pm P\times Aa\pm Q\times Bb}{P+Q+R+S}.$$

Laonde si vede che *si avrà la distanza perpendicolare o obliqua del centro d' un numero qualunque di forze parallele, agenti per lo stesso verso, da un piano di posizione qualunque, col dividere la somma de' momenti di tutte le forze, o la differenza fra la somma de' momenti delle forze situate da una parte del piano de' momenti, e la somma de' momenti delle forze situate dall' altra parte, per la somma di tutte le forze.*

66. Corollario II. Allorchè il piano YZ (Fig. 25.) passa pel centro F di tutte le forze, la distanza Ff svanisce; ed allora si ha $R\times Cc+S\times Dd-P\times Aa-Q\times Bb=0$, o sia $R\times Cc+S\times Dd=P\times Aa+Q\times Bb$.

Fig. 25

Laonde ne segue che *la somma de' momenti delle forze che sono dalla stessa parte, per rapporto ad un piano che passa pel centro di tutte le for-*

for-

forze, è uguale alla somma de' momenti delle forze situate dall' altra parte.

67. Corollario III. Ripigliamo le Figure 23 e 24; e supponiamo che le forze P, Q, R, S, sempre parallele, non agiscano per lo stesso verso; che, per esempio, le forze P, Q agiscano dall' alto al basso, e le forze R, S dal basso all' alto. Siano Ee, Hh, le distanze (parallele alle rette Aa, Bb, &c) dei centri E, H, delle due classi di forze, dal piano YZ. Chiamo Z la distanza simile del centro generale di tutte le forze P, Q, R, S, dal medesimo piano; e suppongo che questo centro sia situato alla destra del piano di cui trattasi. Si avrà (64, caso I.),

$$R \times Cc + S \times Dd = (R + S) \times Hh,$$
$$P \times Aa + Q \times Bb = (P + Q) \times Ee.$$

Da un altro canto, si ha (63), $(R+S) \times Hh - (P+Q) \times Ee = (R+S-P-Q) \times Z$ (Fig. 23); ed $(R+S) \times Hh + (P+Q) \times Ee = (R+S-P-Q) \times Z$ (Fig. 24.). Quindi, si avrà (riunendo amendue i casi, e mettendo in vece di $(R+S) \times Hh$, $(P+Q) \times Ee$, i loro valori), $R \times Cc + S \times Dd \mp P \times Aa \mp Q \times Bb = (R+S-P-Q) \times Z$; cioè a dire che *la differenza o la somma de' momenti delle forze componenti è uguale al momento della risultante.*

Si avrà il valore di Z, dividendo i due membri per $R+S-P-Q$.

Se fosse $Z=0$, si avrebbe $R \times Cc + S \times Dd = P \times Aa + Q \times Bb$.

68. Corollario IV. Allorchè tutte le forze P, Q, R, S, sono situate nel medesimo

rando che $ff+gg=1$), $c^2 q^2 = a^2 n^2 [(Q+q)^2 + P^2 + 2Pf(Q+q)]$; d' onde si ricava facilmente:

(B) $q = \frac{a^2 n^2 (Q+fP)}{c^2 - a^2 n^2} \pm \frac{an}{c^2 - a^2 n^2} \times \sqrt{[(Q^2 + P^2 + 2fPQ)(c^2 - a^2 n^2) + a^2 n^2 (Q+fP)^2]}$.

324. Questa formola generale è un poco complicata. Ma osserveremo che nella maggior parte de' casi che hanno realmente luogo nella pratica, il raggio dell' asse essendo piccolissimo per rapporto a quelli del cilindro e della ruota, la forza richiesta per vincere l' attrito, deve pur essere piccolissima per rapporto a P ed a Q. Laonde ne segue che nel radicale dell' equazione (A), si può, senza pericolo di molto errore, trascurare i termini che contengono q. Allora quest' equazione diventa $cq = an \sqrt{[Q^2 g^2 + (P+fQ)^2]}$, ovvero $q = \frac{an}{c} \sqrt{[Q^2 + P^2 + 2fPQ]}$: ovvero ancora (mettendo per Q il suo valore $\frac{Pb}{c}$), $q = \frac{anP}{c^2} \times \sqrt{(b^2 + c^2 + 2fbc)}$, formola d' un uso abbastanza comodo.

Esempio. Siano $P = 900^{\text{lib.}}$; $a = 1$; $b = 10$; $c = 60$; $n = \frac{1}{3}$; l' angolo $HDE = 45°$, o sia $f = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Si troverà $q = 3,372^{\text{lib.}}$ circa. Convien dunque aggiungere alla potenza circa $3^{\text{lib.}}$ e $\frac{372}{1000}$, per vincere l' attrito; quindi questa potenza che, senza l' attrito, non sarebbe stata che di 150 libbre, sarà di $153,372^{\text{lib.}}$, avuto riguardo all' attrito.

325. Quando la direzione della potenza Q

è verticale, si ha $g = 0$, $f = 1$; e l'equazione (B) dà, prendendo il segno superiore del radicale, $q = \frac{an(P+Q)}{c-an}$, ovvero $q = \frac{anP(c+b)}{c(c-an)}$.

Esempio. Siano come nell'esempio precedente, $P = 900^{\text{lib.}}$; $a = 1$; $b = 10$; $c = 60$; $n = \frac{1}{5}$. Si troverà $q = 3,51^{\text{lib.}}$, ad un di presso.

326. Il problema non sarà più difficile da risolvere in generale, se il peso e la potenza non sono nel medesimo piano. Allora converrà cercare le pressioni risultanti contro ciascun appoggio (Fig. 103), come è stato spiegato (227), osservando che se dicasi qui r la piccola potenza che convien aggiungere a Q per vincere la resistenza totale che proviene dagli attriti contro i due appoggi, si deve mettere $Q+r$ invece di Q ne' valori trovati per le pressioni E ed F, nell' articolo citato. Così, si avrà presentemente, Fig. 103.

$$E = \frac{\sqrt{[(\pi(Q+r) \times CF)^2 + (P \times OF + \lambda(Q+r) \times CF)^2]}}{EF},$$

$$F = \frac{\sqrt{[(\pi(Q+r) \times CE)^2 + (P \times OE + \lambda(Q+r) \times CE)^2]}}{EF}.$$

Queste due pressioni producono due attriti, che hanno per valori rispettivi nE, ed nF (essendo sempre n il rapporto dell' attrito alla pressione), e per braccio di leva il raggio dell' asse, mentre la potenza r, destinata a vincerli, ha per braccio di leva il raggio della ruota. E siccome fa d' uopo, per l'equilibrio, che il momento della potenza r sia uguale alla somma de' momenti delle due resistenze nE, nF; ne segue che chiamando, come sopra, a

il raggio dell' asse, c quello della ruota, si avrà $rc = anE + anF$, equazione da cui si ricaverà il valore dell' incognita r, dopo avervi sostituito in vece di E ed F i loro valori dati di sopra.

Se ne' valori di E ed F, si trascurino i termini che contengono r, come piccolissimi per rapporto agli altri, e si sostituiscano questi valori così semplificati, nell' equazione precedente; si troverà:

$$r = \frac{an}{c} \times \left(\frac{\sqrt{[(\pi Q \times CF)^2 + (P \times OF + \lambda Q \times CF)^2]}}{EF} + \frac{\sqrt{[(\pi Q \times CE)^2 + (P \times OE + \lambda Q \times CE)^2]}}{EF} \right).$$

Facciamo un' applicazione di questa formola.

ESEMPIO. Siano come nei due esempi precedenti, $P = 900^{\text{lib.}}$; $n = \frac{1}{3}$; $a = 1$; $c = 60$; il raggio del cilindro $= 10$, e per conseguenza $Q = \frac{P}{6}$; l' angolo che la direzione della potenza fa coll' orizzonte $= 45$ gradi, e conseguentemente $\pi = \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Supponiamo inoltre $CE = \frac{EF}{4}$; $OE = \frac{3EF}{4}$; e quindi $CF = \frac{3EF}{4}$, $OF = \frac{EF}{4}$. Si troverà $r = 3,146^{\text{lib.}}$

Dell' Attrito sul Piano inclinato.

Fig. 135. 327. Sia un peso P (Fig. 135), posto sopra un piano inclinato, la cui lunghezza è HG, l' altezza HI, ed IG la base. Rappresentiamo questo peso colla verticale PD; e decomponia-

mo questa forza in due altre PC, PA, una parallela, l'altra perpendicolare alla lunghezza del piano inclinato. Egli è chiaro che si avrà, Forza $PC = P \times \frac{HI}{GH}$; Forza $PA = P \times \frac{IG}{GH}$. La prima di queste due forze, che chiamasi la *gravità relativa* del corpo, tende a farlo strisciare: la seconda produce la pressione sul piano inclinato, e vi cagiona un attrito della prima specie; di modo che chiamando n il rapporto dell'attrito alla pressione, si avrà, Attrito $= nP \times \frac{IG}{GH}$. Dunque, se il peso è abbandonato unicamente a se stesso, non discenderà, a meno che la sua gravità relativa PC non sia maggiore dell' attrito, cioè a dire, a meno che non abbiasi $\frac{P \times IH}{GH} > nP \times \frac{IG}{GH}$, o sia $IH > n \times IG$.

Di qui ne segue che *un corpo posto sopra un piano inclinato ed abbandonato all' azione della gravità, non discende se non quando l'altezza del piano inclinato è maggiore del prodotto della base moltiplicata pel rapporto dell' attrito alla pressione*.

328. Supponiamo che il corpo sia in procinto a discendere, ovvero che la sua gravità relativa sia uguale alla resistenza dell' attrito. Si avrà $IH = n \times IG$, ovvero $n = \frac{IH}{IG}$. Quindi, allorchè l' inclinazione del piano inclinato è tale che il corpo principia a discendere per la sua sola gravità relativa, il rapporto dell' attrito alla pressione è lo stesso che quello dell' altez-

za del piano inclinato alla sua base. Conoscendo adunque il primo rapporto, si conoscerà il secondo; ovvero reciprocamente, conoscendo il secondo, si conoscerà il primo.

Supponiamo, per esempio, che l'attrito sia il terzo della pressione. Si avrà $\frac{IH}{IG} = \frac{1}{3}$. Ora, per la Trigonometria, il rapporto $\frac{IH}{IG}$ può esser riguardato come quello della tangente dell' angolo *IGH* d'inclinazione del piano, al seno tutto; e si trova nelle Tavole trigonometriche, che quest' ultimo rapporto essendo $\frac{1}{3}$, l'angolo *HGI* è d'incirca $18^\circ\ 27'$. *Quindi*, l'attrito essendo supposto il terzo della pressione, l'angolo d'inclinazione del piano deve essere d'incirca $18^\circ\ 27'$, affinchè il corpo, per la sua sola gravità relativa, sia in procinto di discendere.

Se al contrario fosse dato l'angolo d'inclinazione del piano, si troverebbe il rapporto $\frac{IH}{IG}$ per le Tavole; ed in seguito si avrebbe n dall' equazione $n = \frac{IH}{IG}$. Da ciò ne segue un modo assai semplice e comodo di determinare l'attrito della prima specie, per la via dell' esperienza. Non si dee per ciò che mettere un corpo sopra un piano dapprima pochissimo inclinato all' orizzonte; accrescere a poco a poco l'inclinazione, infino a tanto che il corpo cominci a discendere; ed osservare allora il rapporto dell' altezza del piano inclinato alla sua base: questo rapporto è quello dell' attrito alla pressione.

329. Consideriamo ora un corpo che una potenza sta per far salire lungo un piano inclinato qualunque, contrastando colla gravità relativa e coll' attrito. Il valore di questa potenza è agevole a trovarsi in generale; ma noi ci accontenteremo di risolvere il problema pei due casi i più ordinarj; cioè a dire, allorchè la direzione della potenza è parallela alla lunghezza, o alla base del piano inclinato. Si imiterà facilmente lo stesso metodo negli altri casi.

330. Suppongo adunque in primo luogo che la potenza Q (Fig. 136), sia parallela alla lunghezza del piano inclinato. Affinchè il corpo cominci a strisciare nella direzione GH, fa d' uopo che la forza Q sia uguale alla somma della gravità relativa del corpo, e dell' attrito. Ora, costruendo come sopra, il parallelogrammo rettangolo $PADC$, e nominando sempre n il rapporto dell' attrito alla pressione, si ha, Forza $PC = P \times \frac{HI}{HG}$; Forza $PA = P \times \frac{IG}{HG}$; Attrito $= nP \times \frac{IG}{HG}$. Avremo dunque, $Q = P \times \frac{HI}{HG} + nP \times \frac{IG}{HG}$, formola ove si vede la quantità onde l' attrito entra nell' espressione della potenza Q. Fig. 136.

Esempio. Siano il peso $P = 8000^{\text{lib.}}$; l' angolo d' inclinazione HGI del piano, di 30°, o sia $\frac{HI}{HG} = \frac{1}{2}$; $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$, ad un di presso; $n = \frac{1}{3}$. Si avrà $Q = 4000^{lib.} + 2309,333^{lib.}$ La potenza Q sarà dunque d'un poco più di 6309 libbre, mentre fatta astrazione dall'attrito, ella non sarebbe stata che di $4000^{lib.}$

Fig. 137. 331. In secondo luogo, sia la potenza Q (Fig. 137) parallela alla base del piano inclinato. Avendo decomposto, come sopra, il peso del corpo in due forze PC, PA, una parallela, l'altra perpendicolare al piano inclinato, risolvo parimenti la potenza Q, espressa dalla parte PO della sua direzione, in due altre forze PN, PM, una parallela, l'altra perpendicolare alla lunghezza del piano inclinato. Si avrà, Forza $PC = P \times \frac{HI}{HG}$; Forza $PA = P \times \frac{IG}{HG}$; Forza $PN = Q \times \frac{IG}{HG}$; Forza $PM = Q \times \frac{IH}{HG}$. La pressione totale del piano inclinato essendo uguale alla somma delle due forze PA, PM; se dicasi sempre n il rapporto dell'attrito alla pressione, egli è chiaro, che si avrà, Attrito $= n \times \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{IH}{HG}\right)$. Ciò posto, affinchè il corpo cominci a strisciare nella direzione GH, fa d'uopo che la forza PN sia uguale alla somma della forza PC, e dell'attrito; si avrà dunque allora, $\frac{Q \times IG}{GH} = \frac{P \times HI}{HG} + n \left(P \times \frac{IG}{HG} + Q \times \frac{HI}{HG}\right)$; d'onde si raccoglie $Q = \frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH}$.

Se non vi fosse verun attrito, il valore della potenza sarebbe $\frac{P \times HI}{IG}$. Quindi, $\frac{P \times (HI + n \times IG)}{IG - n \times IH}$ $- \frac{P \times HI}{IG}$, o sia $\frac{n P \times \overline{HG}^2}{\overline{IG}^2 - n \times IG \times IH}$, è la quantità onde l'attrito concorre ad accrescere la potenza.

Esempio. Siano $P = 8000^{lib.}$; l'angolo $HGI = 30^\circ$, o sia $\frac{HI}{HG} = \frac{1}{2}$, $\frac{IG}{HG} = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866$; $n = \frac{1}{3}$. Si troverà $Q = 9022^{lib.}$, circa. Senza l'attrito la potenza non sarebbe che d'incirca $4619^{lib.}$

Dell' Attrito nella Vite.

332. Ripigliamo qui la costruzione e la dimostrazione dell'articolo 290. La piccola potenza r (Fig. 125 e 126), che fa equilibrio col piccol peso p, agendo secondo una direzione tangenziale alla circonferenza di cui CP è il raggio, ha per valore $p \times \frac{AB}{\text{circ. } Cp}$, fatta astrazione dall' attrito. Sia r' la piccola potenza che agendo allo stesso modo, fa equilibrio col medesimo peso, avendo inoltre riguardo all' attrito. Egli è chiaro, per l'articolo precedente combinato coll' articolo 290, che si avrà, Fig. 125. e 126.

$$r' = \frac{p \times (AB + n \times \text{circ. } Cp)}{\text{circ. } Cp - n \times AB}.$$

Sostituiamo ora in vece della potenza r', un' altra q' che agisca in Q, secondo una direzione perpendicolare a CQ, ed in un piano perpendicolare all' asse della vite. Si avrà $r' : q' :: CQ : Cp$,